

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Dürr, Karl: Die mathematische Logik des Arnold Geulinx. J. unified Sci. 8, 361—368 (1940).

In dieser Abhandlung zeigt der Verf., daß schon Arnold Geulinx (1625—1669) in seinem „Methodus inveniendi argumenta“ (1663) gewisse Ideen, die in der modernen Logistik eine wichtige Rolle spielen, benutzt hat. Geulinx ist deshalb nicht nur — wie J. P. N. Land 1895 behauptet hat — ein Wegbereiter neuerer logischer Forscher wie Boole, R. Grassmann und E. Schröder, sondern auch ein Vorläufer der Logistik im engeren Sinne. Als Beispiel dafür kann besonders erwähnt werden, daß Geulinx zwischen „materialer Implikation“ und „Folgebeziehung“ unterschieden hat; daß er eine Reihe von logistischen Sätzen (in der lateinischen Sprache) formuliert hat; daß er diese Sätze gewissermaßen nach euklidischem Muster bewiesen und in eine deduktive Anordnung gebracht hat; und daß er den Begriff „wahre Aussage“ ungefähr wie A. Tarski definiert hat. Seine Sätze und Beweise lassen sich daher, wie Verf. zeigt, mittels der von J. Łukasiewicz erfundenen Symbolik darstellen.

Jørgen Jørgensen (København).

Pólya, G.: Sur les types des propositions composées. J. Symbolic Logic 5, 98—103 (1940).

Es wird für das folgende, von W. S. Jevons (1879) zuerst aufgestellte und von ihm, W. K. Clifford und E. Schröder [Algebra der Logik 1 (1890), Anhang 6] in Spezialfällen behandelte logisch-kombinatorische Problem eine allgemeine Lösungsmethode angegeben: Unter den Aussageverbindungen, die man aus n Grundaussagen P_1, P_2, \dots, P_n mit Hilfe der Aussageverknüpfungen bilden kann, sollen zwei vom gleichen Typ heißen, wenn die eine aus der anderen dadurch hervorgeht, daß man die P_1, P_2, \dots, P_n irgendwie vertauscht und eventuell noch gewisse dieser P_i gegen ihre Negationen auswechselt. Logisch äquivalente Aussageverbindungen werden dabei als nicht verschieden angesehen. Die Frage ist dann, wieviel verschiedene Typen bei gegebenem n existieren. Die Lösung gelingt durch Heranziehung einer gewissen Permutationsgruppe der Ordnung $n! 2^n$, die eng mit der symmetrischen Gruppe der Ordnung $n!$ zusammenhängt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ werden die notwendigen Berechnungen vollständig durchgeführt und die Typenzahlen angegeben.

Ackermann.

Quine, W. V., and Nelson Goodman: Elimination of extra-logical postulates. J. Symbolic Logic 5, 104—109 (1940).

Oft läßt sich ein Axiom „ $P(d)$ “ mit der außerlogischen Konstanten „ d “ dadurch beweisen, daß man „ d “ mit Hilfe einer neuen Konstanten „ a “ definiert durch: $d =_{Df} f(a)$. Für „ a “ wird kein Axiom gefordert. „ a “ muß so interpretierbar sein, daß „ $f(a)$ “ die Bedeutung von „ d “ gewinnt. Beispiel: d Teilrelation, $P(d)$ transitives Gesetz, a die Relation des Übertreffens; $xdy =_{Df} (\forall z)(xaz \rightarrow yaz)$. Generell ist die dem einzigen Axiom „ $P(d)$ “ genügende Konstante „ d “ genau dann mit dem angegebenen Effekt definierbar, wenn $(\forall x)(P(f(x)) \cdot (\exists x)(d = f(x)))$ gilt. Äquivalent hiermit ist (in einer typenfreien Logik) die Existenz eines logischen Modells für „ $P(d)$ “. Für Axiomensysteme mit mehreren Grundbegriffen gilt Analoges. In Anbetracht der auf Grund dieser Erkenntnisse vielfach vorhandenen „trivialen“ Möglichkeit, Axiome zu eliminieren, halten es die Verff. für zweckmäßig, sich bei Untersuchungen über Einsparungen von Axiomen des Tarskischen Begriffs der „synthetically complete systems“ zu bedienen (das sind solche, in denen jeder Ausdruck entscheidbar, oder nachweislich mit einem rein logischen äquivalent ist).

Hermes (Bonn).

McKinsey, J. C. C.: Postulates for the calculus of binary relations. *J. Symbolic Logic* 5, 85—97 (1940).

Die auf Anregung Tarskis entstandene Arbeit axiomatisiert die von Peirce und Schröder behandelte Relationstheorie. Grundbegriffe sind: K (Klasse der Relationen), $x < y$ (Enthaltensein von Relationen) und x/y (Verkettung von Relationen). Gefordert wird: K ist ein vollständiger atomistischer Verband [Tarski, *Fundam. Math.* 24, 177 bis 198 (1935); dies. Zbl. 11, 2], der abgeschlossen ist bezüglich der assoziativen binären Relation $/$, und es gilt: aus $x < y$ und $u < v$ folgt $x/u < y/v$; $1(x/1) = 1$ für $x \neq 0$; aus $p < x/y$ folgt die Existenz von q und r mit $q < x$, $r < y$, $p = q/r$ (p, q, r Atome); aus dem Nichtverschwinden von p/q , q/p , p/r , r/p folgt $q = r$. Die Konverse ist definierbar. Verf. zeigt u. a.: Zwei Modelle mit der gleichen Kardinalzahl homogener Atome (das sind solche mit $p/p \neq 0$) sind isomorph. Mit dem Auswahlaxiom und der verallgemeinerten Kontinuumshypothese gilt sogar, daß zwei Modelle mit derselben Elementzahl isomorph sind (Semikategorizität [Tarski]). Das System ist widerspruchsfrei, und die Axiome sind unabhängig. *Hermes* (Bonn).

Löwenheim, Leopold: Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkül. *J. Symbolic Logic* 5, 1—15 (1940).

Verf. tritt dafür ein, in der logistischen Symbolik zum Schröderschen Relativkalkül [E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik 3 (1895)] zurückzukehren, als dessen wesentlichster Vorzug angeführt wird, daß infolge des Fehlens der logischen Paradoxien keine Typentheorie erforderlich ist. Da sich aber andererseits im Schröderschen Kalkül Mengen von Mengen nicht bilden lassen, sind nicht alle mathematischen Sätze in ihm ausdrückbar. Verf. ordnet daher gewissen Mengen M ein Element m des Denkbereichs zu, das als Vertreter der Menge M zu gelten hat. Zugleich wird ein neues Relativ E eingeführt, wobei E_{xy} die Bedeutung hat: x ist Element derjenigen Menge, die durch y vertreten wird. Es darf aber nicht jeder beliebigen Menge ein Vertreter zugeordnet werden, da sonst die Paradoxien doch auftreten, sondern nur jeder Untermenge einer gewissen Menge A , so daß also die Forderung des Verf. im wesentlichen auf das Aussonderungssaxiom hinausläuft. Diese Menge A umfaßt den ursprünglichen, noch nicht durch die Mengenvertreter erweiterten Denkbereich. In zweiter Linie kann dann der durch die Mengenvertreter erweiterte Denkbereich als neue Menge A genommen werden usw., so daß also auch hier eine gewisse Stufung eintritt. Es wird dann gezeigt, daß sich jetzt Sätze über Mengen von Mengen ausdrücken lassen. — Es ist dazu zu bemerken, daß aus den Ausführungen des Verf. die große Überlegenheit, die der Schröderkalkül über die moderne Symbolik haben soll, nicht ersichtlich ist. Der Schrödersche Relativkalkül entspricht etwa dem Prädikatenkalkül der zweiten Stufe (vgl. über diesen Begriff Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik 1938, Kap. IV, § 1, 2. Aufl., s. dies. Zbl. 18, 193), der ebenso wie der Schröderkalkül hinsichtlich seines Formalismus in sich abgeschlossen ist. Bei diesem Prädikatenkalkül kann man die vom Verf. angegebene Erweiterung mit demselben Erfolg vornehmen. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

Algebra und Zahlentheorie.

Bell, E. T.: Postulational bases for the umbral calculus. *Amer. J. Math.* 62, 717—724 (1940).

Es soll eine Art Vektorrechnung für Vektoren mit unendlich vielen Komponenten aufgebaut werden, die der Verf. umbrae nennt. Über diesen Aufbau läßt sich nur sagen, daß er jedenfalls in der gegebenen Form nicht zu gebrauchen ist, da die Definitionen keineswegs eindeutig sind. So ist z. B. die Definition der Potenz einer umbra von ihrer Zusammensetzung als Summe von anderen umbrae abhängig. Diese Zusammensetzung ist aber keineswegs eindeutig, da die Summe in der in der Vektorrechnung üblichen Weise definiert wird. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

Polynome, Lineare Algebra, Invariantentheorie:

Martino, C. M.: Una questione di formule ricorrenti. Le formule di Waring. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 171—173 (1940).

Martino, Caio Manlio: Un triangolo aritmetico relativo a una questione di formule ricorrenti. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 716—722 (1940).

Verf. beweist auf höchst umständlichem Wege durch vollständige Induktion die nachstehende Formel: Ist $x + y = S$, $xy = P$, so gilt für jede natürliche Zahl m :

$$x^m + y^m = \sum_{0 \leq k \leq m/2} (-1)^k \left[\binom{m-k+1}{k} - \binom{m-k-1}{k-2} \right] P^k S^{m-2k}.$$

Verf. übersieht, daß seine Formel ein Spezialfall der allgemeinen, expliziten Formel von Waring für die Potenzsummen ist (siehe z. B. Perron, Algebra I, S. 162), aus der sie sich für den Fall von zwei Veränderlichen unmittelbar ergibt. *Holzer* (Wien).

Angheluşă, Th.: Bildung des Quotienten und Restes zweier Polynome, wenn der Divisor in Faktoren ersten Grades zerlegt ist. Gaz. mat. 45, 459—463 u. 505—511 (1940) [Rumänisch].

Verf. beweist mit Hilfe Vandermondescher Determinanten die Identitäten

$$\frac{a^{m-1+p}}{(a-b) \dots (a-l)} + \frac{b^{m-1+p}}{(b-a) \dots (b-l)} + \dots + \frac{l^{m-1+p}}{(l-a) \dots (l-k)} = S_p \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n),$$

in denen S_p homogene Polynome p -ten Grades in den m Größen a, b, \dots, l sind und $S_0 = 1$ ist. Diese Identitäten wendet er an auf die Aufgabe, den Quotienten $Q(x)$ und den Rest $R(x)$ der Division des Polynoms $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ durch das Polynom $S(x) = (x-a)(x-b) \dots (x-l)$ zu bestimmen. Unter Beschränkung auf den Fall $S(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ erhält er für $Q(x)$ und $\frac{R(x)}{S(x)}$ Ausdrücke, in denen solche homogenen Polynome S_p vorkommen, wie sie in den obigen Identitäten auftreten. Er bemerkt, daß diese Darstellung in engem Zusammenhang mit der Lagrangeschen Interpolationsformel steht. Der allgemeine Fall $S(x) = (x-a)^p(x-b)^q \dots (x-l)^t$ wird auf den Fall, daß $S(x)$ lauter ungleiche Faktoren enthält, zurückgeführt. *Max Zacharias* (Berlin).

Jakovkin, M. V.: Sur un critérium d'irréductibilité de polynômes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 771—773 (1940).

$f(x)$ bedeutet ein Polynom n -ten Grades mit lauter ganzen Koeffizienten, R eine obere Schranke der reellen Teile der Nullstellen von $f(x)$ und p_1, p_2, q_1, q_2 bzw. Q bedeuten je eine ganze Zahl bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache von q_1 und q_2 . Ist nun die Zahl $Q^n \cdot f\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ für $\frac{p_1}{q_1} > 0$ und $\frac{p_2}{q_2} \geq R$

eine Primzahl, so ist $f(x)$ irreduzibel im rationalen Zahlkörper. *Gy. v. Sz. Nagy*.

Vessiot, Ernest: Sur une théorie nouvelle de la réductibilité des équations algébriques. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 159—161 (1940).

Es wird eine neuartige Begründungsmöglichkeit der Galoisschen Theorie skizziert. Den Ausgangspunkt bildet dabei statt der Gruppe aller Wurzelvertauschungen eines gegebenen Polynoms $F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$ mit nichtverschwindender Diskriminante das System aller Tschirnhausentransformationen

$$x' = t_{n-1} x^{n-1} + t_{n-2} x^{n-2} + \dots + t_0,$$

die die Gleichung $F(x) = 0$ in sich selbst überführen.

Krull (Bonn).

Levi, Beppo: Eine intuitionistische Theorie der ganzen rationalen Funktionen einer Variablen. Publ. Inst. Mat., Rosario 1, Nr 4, 1—27 (1940) [Spanisch].

Verf. entwickelt eine intuitionistische Theorie der ganzen rationalen Funktionen. An die Stelle der Wurzeln einer algebraischen Gleichung treten die vom Verf. sog. Wurzelintervalle. Für diese entwickelt er eine der klassischen analoge Theorie, die er bis zu den Sätzen von Sturm und Budan-Fourier aufbaut. *G. Scorza-Dragonì*.

Szökefalvi Nagy, Gyula v.: Über Polynome mit lauter reellen Nullstellen. Mat. természett. Értes. **59**, Tl 1, 72—92 u. deutsch. Zusammenfassung 93—94 (1940) [Ungarisch].

Soient $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ les zéros, tous réels, du polynome $f(x)$ de degré n et $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$ les zéros de la dérivée $f'(x)$. On démontre l'inégalité:

$$y_{s-1} - y_r \geq (x_s - x_r) \frac{2}{1 + \mu} \sqrt{\frac{(s-r-1)\mu}{s-r+\mu}} \geq \frac{2}{1 + \mu} \sqrt{\frac{(s-r-1)\mu}{n}},$$

$$\mu = \max(r, n+1-s), \quad 1 \leq r < s \leq n,$$

qui généralise un résultat antérieur de l'aut. [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **27**, 37—43 (1918)]. Dans certains cas l'inégalité peut être renforcée. Par ex. si $y_r = x_r$, on a

$y_{s-1} - y_r \geq (x_s - x_r) \frac{s-r}{n+1-r}$. Un théorème de Laguerre est généralisé pour les fonctions entières $f(x)$ de genre zéro de la manière suivante. Si $f(x)$ a tous ses zéros réels et $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs, le zéro x_0 de la dérivée $f'(x)$, situé entre α et β , vérifie les inégalités

$$\alpha + \frac{(\beta - \alpha)q}{q + r + s_\alpha} < x_0 < \beta - \frac{(\beta - \alpha)r}{q + r + s_\beta}$$

où q, r sont les ordres de multiplicité des zéros α, β et

$$s_\alpha = \sum \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha_k}, \quad s_\beta = \sum \frac{\beta - \alpha}{\beta_k - \alpha},$$

les $\alpha_k < \alpha, \beta_k > \beta$ étant les autres zéros de $f(x)$. La propriété est étendue aussi aux fonctions entières de genre fini $f(x)$, ayant tous leurs zéros réels, $f(0) \neq 0$ et ne contenant pas de facteur exponentiel (fonctions simples). T. Popoviciu (București).

Anghelutza, Th.: Sur une limite des modules des zéros des polynomes. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **21**, 211—213 (1939).

Beweis des Satzes von Ballieu (vgl. dies. Zbl. **23**, 101). Verf. scheint aber diesen Satz nicht zu kennen. Gy. v. Sz. Nagy (Kolozsvár).

Erdős, P.: On extremal properties of the derivatives of polynomials. Ann. of Math., II. s. **41**, 310—313 (1940).

Das Polynom n -ten Grades $f(x)$ genüge im Intervall $J: -1 \leq x \leq +1$ der Ungleichung $|f(x)| \leq 1$. Nach A. Markoff [Abh. Akad. Wiss. St. Petersburg **62**, 1—24 (1889)] gilt dann in $J: |f'(x)| \leq n^2$, und die Gleichheit wird durch die Tschebyscheff-polynome erreicht. Macht man nun die weitere Voraussetzung, daß $f(x)$ nur reelle Wurzeln besitzen und J frei von Wurzeln sein soll, so kann Verf. durch elementare Abschätzungen die schärfere Ungleichung $|f'(x)| < \frac{1}{2}en$ beweisen, in der e durch keine kleinere Konstante ersetzbar ist. Legt man hingegen dem reellen Polynom $f(x)$, für das in $J: |f(x)| < 1$ gilt, die Zusatzbedingung auf, daß $f(x)$ keine Wurzeln im Innern des Einheitskreises haben soll, so läßt sich die Markoffsche Ungleichung folgendermaßen verbessern: Es ist für $-1+c < x < 1-c, c > 0: |f'(x)| < \frac{4}{c^2} \sqrt{n}$ bei genügend großen Werten von n ; \sqrt{n} kann dabei durch keine langsamer wachsende Funktion von n ersetzt werden. Harald Geppert (Berlin).

Skolem, Th.: Einige Sätze über Polynome. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1940**, 1—16 (Nr 4).

Es seien x_1, \dots, x_m unabhängige Variable und $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$) ganzwertige Polynome. Mit $a = (a_1, \dots, a_m)$ werde eine konstante Realisierung von (x_1, \dots, x_m) bezeichnet. Verschwinden die Polynome $f_i(x)$ für keine Realisierung a gleichzeitig, so gibt es n Polynome $F_i(x) = F_i(x_1, \dots, x_m)$ mit rationalen Koeffizienten derart, daß $\sum_{i=1}^n f_i(x) F_i(x) = 1$ identisch gilt. Die F_i können nicht alle ganzwertig sein, falls die f_i für irgendeine ganzrationale Realisierung a einen gr. g. T. $d(a) > 1$ haben. Werden die $F_i(a)$ als Brüche mit einem gemeinsamen Nenner geschrieben, so muß

stets $d(a)$ in diesem Nenner aufgehen. Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, daß stets Polynome F_i mit „minimalem gemeinsamen Nenner“ gefunden werden können; das soll heißen, daß für jede ganzzahlige Realisierung a die $F_i(a)$ als Brüche mit dem gemeinsamen Nenner $d(a)$ geschrieben werden können. Dieser Satz enthält als Spezialfall folgenden, vom Verf. früher bewiesenen Satz (siehe dies. Zbl. 16, 245). Haben die ganzwertigen Polynome $f_i(x)$ für jede ganzzahlige Realisierung a den gr. g. T. 1, so gibt es ganzwertige Polynome $F_i(x)$ derart, daß die Identität

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_m) F_i(x_1, \dots, x_m) = 1$$

besteht.

H. L. Schmid (Berlin).

Skolem, Th.: Über Funktionen der Form $\sum_{i=0}^{m-1} f_i(x) P_m(x-i)$, wo $f_i(x)$ Polynome sind und $P_m(x) = 1$ oder 0 , je nachdem $x \equiv 0$ oder $\not\equiv 0 \pmod{m}$ ist. Norsk mat. Tidsskr. 22, 52—63 (1940) [Norwegisch].

Es sei R der Ring der Polynome einer Unbestimmten x mit ganzrationalen Koeffizienten; es bezeichne R_1 den Oberring von R der ganzwertigen Polynome, welche rationale Koeffizienten haben, aber für jedes ganzrationale x einen ganzrationalen Wert ergeben. In R_1 gilt nicht mehr der Satz von der eindeutigen Primzerlegung. Es existiert in R_1 zu zwei Elementen nicht einmal stets ein gr. g. Teiler. Verf. stellt sich folgende Frage: Welche Gesamtheit von Funktionen erhält man, wenn man von R_1 ausgehend zur Konstruktion neuer Funktionen außer den Ringoperationen die Operation des gr. g. Teilers anwendet? Oder implizit gewendet: Gesucht ein Oberring R_ω von R_1 mit folgender Eigenschaft: Zu zwei Elementen $f(x), g(x)$ aus R_ω gibt es ein Element $h(x)$ aus R_ω derart, daß für jede ganze Zahl $x = a$ die Zahl $h(a)$ ein gr. g. T. von $f(a)$ und $g(a)$ ist. Es zeigt sich, daß ein solcher Ring R_ω gerade von der Gesamtheit der im Titel angegebenen Funktionen gebildet wird. Dabei sind $f_i(x)$

ganzwertige Polynome, und $P_m(x)$ kann in der Form $mP_m(x) = \sum_{r=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i}{m} r x}$ geschrieben werden. — Verf. nennt Funktionen der Form $\sum_{i=0}^{m-1} f_i(x) P_m(x-i)$ (alle $f_i(x)$ Polynome)

Periodenpolynome vom Range m . Ein Periodenpolynom vom Range 1 ist ein Polynom im gewöhnlichen Sinne. Der Ring R_1 ist die Gesamtheit aller ganzwertigen Periodenpolynome vom Range 1. Entsprechend wird die Gesamtheit solcher Polynome vom Range m mit R_m bezeichnet. Die Menge R_m ist ein Ring. R_ω ergibt sich als die Vereinigungsmenge aller R_m ($m=1, 2, \dots$). Bei der Untersuchung der Eigenschaften eines Ringes R_m ergibt sich als Nebenresultat: Es seien $f_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) und $g(x)$ Elemente

aus R_m ; notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung $\sum_{i=1}^n f_i(x) F_i(x) = g(x)$ durch Elemente $F_i(x)$ aus R_m ist, daß der gr. g. T. aller $f_i(x)$ für beliebiges ganzes x im Wert von $g(x)$ aufgeht.

H. L. Schmid (Berlin).

Carlitz, L.: Linear forms and polynomials in a Galois field. Duke math. J. 6, 735—749 (1940).

Es seien Γ_n das Galoisfeld von p^n Elementen, t, u_0, u_1, \dots Unbestimmte und

$$f_m(t) = \prod (t + c_0 u_0 + \dots + c_{m-1} u_{m-1}),$$

wo das Produkt über alle Systeme $(c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$ mit Elementen aus Γ_n zu erstrecken ist. $f_m(t)$ kann in der Form $f_m(t) = D(u_0, \dots, u_{m-1}, t) : D(u_0, \dots, u_{m-1})$ geschrieben werden; dabei ist

$$D(u_0, \dots, u_{m-1}) = \begin{vmatrix} u_i & u_i^{p^n} & \dots & u_i^{p^{n(m-1)}} \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1),$$

und

$$D(u_0, \dots, u_{m-1}, t) = \begin{vmatrix} u_i & u_i^{p^n} & \dots & u_i^{p^{nm}} \\ t & t^{p^n} & \dots & t^{p^{nm}} \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

In dem Spezialfall $u_i = x^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) werde $f_m(t)$ mit $\psi_m(t)$ bezeichnet. In einer früheren Arbeit (siehe dies. Zbl. 12, 49) hat Verf. gewisse Eigenschaften der Polynome $\psi_m(t)$ bewiesen. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist, analoge Eigenschaften der allgemeineren Polynome $f_m(t)$ aufzustellen und zu beweisen. Insbesondere werden die inverse Funktion von $f_m(t)$ und einige Grenzfälle ($m \rightarrow \infty$) studiert. Schließlich werden Anwendungen auf die Auswertung von Potenzsummen gegeben.

Z. B. ist $\sum_{(c_0, \dots, c_{m-1})} (c_0 u_0 + \dots + c_{m-1} u_{m-1})^{p^{n-1}} = (-1)^m D(u_0, \dots, u_{m-1})^{p^{n-1}}$.

H. L. Schmid (Berlin).

Rados, Gustav: Die intuitive Herleitung einiger auf Hermitesche Determinanten bezüglichen Sätze. Mat. természett. Értes. 59, 411—416 u. dtsh. Zusammenfassung 417—419 (1940) [Ungarisch].

Sind a_{gh} und a_{hg} konjugiert komplex, so ist $H(a) = |a_{gh}|$ ($g, h = 1, 2, \dots, m$) eine Hermitesche Determinante. $H(a)$ hat m Eckminoren $H_f(a) = |a_{gh}|$ ($g, h = 1, 2, \dots, f$) ($f = 1, 2, \dots, m$). Es gelten unter anderem die Sätze: Sind die Eckminoren von $H(a)$ positiv, so sind auch die übrigen Hauptminoren positiv. Sind die Eckminoren von $H(a)$ positiv bzw. negativ, so zeigen die übrigen Hauptminoren dasselbe Verhalten. Sind die Eckminoren der Hermiteschen Determinanten $H(a)$ und $H(b) = |b_{kl}|$ ($k, l = 1, 2, \dots, n$) ($m \geq n$) positiv, so gilt dasselbe für $H(c) = |a_{gh} + b_{gh}|$ ($g, h = 1, 2, \dots, m$).

Gy. v. Sz. Nagy (Koložsvár).

Turán, P.: On extremal problems concerning determinants. Mat. természett. Értes. 59, Tl 1, 95—103 u. engl. Zusammenfassung 104—105 (1940) [Ungarisch].

Soit $S_n^{(2)}(k)$ la somme des carrés de tous les déterminants $|\varepsilon_{ij}|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, où $\varepsilon_{ij} = \pm 1$, les éléments des k premières lignes étant données tels que, si nous posons

$c_{ij} = \sum_{r=1}^n \varepsilon_{ir} \varepsilon_{jr}$, on ait $|c_{ij}| < n$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. L'aut. démontre que $S_n^{(2)}(k) = (n-k)! 2^{n-k} D$, où $D = |c_{ij}|$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Si $M_n(k)$ est le maximum des valeurs absolues des déterminants considérés $|\varepsilon_{ij}|$, on en déduit que $\sqrt{D} \sqrt{(n-k)!} \leq M_n(k) \leq \sqrt{n^n}$. Pour $k = 2, 3$ on trouve $\sqrt{D} = 2, 4$ respectivement. La valeur de la somme des carrés de tous les déterminants d'ordre n qu'on peut former avec k nombres donnés est également indiquée.

T. Popoviciu (București).

Cavallucci, Leopoldo: Segnatura di una matrice in un campo di razionalità. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 263—273 (1940).

Es sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n ; das charakteristische Polynom $|A - xI|$ der Matrix A zerfällt in gewisse irreduzible Faktoren. Es sei $P(x)$ ein solcher Faktor vom Grade r . Man bilde dann die Matrizen $P(A)$, $P^2(A)$, $P^3(A)$, \dots ; es seien n_1, n_2, n_3, \dots ihre Ränge. Es wird hier bewiesen, daß $n_1 > n_2 > n_3 > \dots > n_t = n_{t+1} = \dots$; genauer werden folgende Beziehungen bewiesen:

$$n_1 = n - h_1 r; \quad n_2 = n - h_2 r; \quad \dots; \quad n_t = n_{t-1} - h_t r; \quad n_t = n_{t+i} \quad (i \geq 1);$$

h_1, h_2, \dots, h_t bedeuten dabei t positive ganze Zahlen, die durch A und $P(x)$ vollständig bestimmt sind und den Ungleichungen $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$ genügen; sie haben folgende Bedeutung: sind M_i die Komponenten der kanonischen Form von A , so ist h_j die Anzahl derjenigen Matrizen M_i , deren charakteristische Polynome durch $P^j(x)$ teilbar sind. Der Beweis wird durch Matrizenkalkül aus der kanonischen Form von A gewonnen. Das Symbol $(h_1 h_2 \dots h_t)$ wird die „Signatur“ von A in bezug auf $P(x)$ genannt; die Gesamtheit aller solchen Symbole, die den verschiedenen Faktoren $P(x)$ von $|A - xI|$ entsprechen, ist die gesamte Signatur von A . Wie man die Signatur von A aus der kanonischen Form von A gebildet hat, so kann man umgekehrt aus der Signatur und aus der Kenntnis der Faktoren von $|A - xI|$ die kanonische Form von A wiederherstellen. Für zwei äquivalente Matrizen fallen die Faktoren der charakteristischen Polynome und die Signaturen zusammen, und umgekehrt.

E. G. Togliatti (Genova).

Werjbitzky, B.: Quelques questions de la théorie des séries de compositions de plusieurs matrices. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 505—512 u. franz. Zusammenfassung 512 (1939) [Russisch].

X_i ($i=1, \dots, m$) seien m quadratische, n -reihige Matrizen. Ein Produkt aus einer Anzahl von Matrizen X_i^j ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n-1$), in dem jede der $(n-1)m$ Matrizen X_i^j höchstens einmal auftritt, heißt eine einfache Komposition der Matrizen X_i . Verf. betrachtet beliebige Polynome in den Matrizen X_i . Unter einem normalen Polynom der X_i versteht er ein solches, das nur Glieder einfacher Komposition enthält. Er beweist: 1. Ein beliebiges Polynom aus m quadratischen, zwei- oder dreireihigen Matrizen kann stets dargestellt werden in der Form eines normalen Polynoms, dessen Grad höchstens m ist für $n=2$ und höchstens $3m$ ist für $n=3$. Die Koeffizienten des Normalpolynoms sind Polynome in den Spuren der einfachen Kompositionen der X_i . 2. Für beliebiges n sollen X_i einfache Normalteiler besitzen. Jede Matrix X_i werde mit Hilfe einer Transformation S_i auf Diagonalgestalt $D_i = S_i X_i S_i^{-1}$

gebracht. $D_i = \sum_{\nu=1}^n D_{i\nu}$ sei die Aufspaltung von D_i in Diagonalmatrizen $D_{i\nu}$ mit nur einem von Null verschiedenen Diagonalelement. Es ist $X_i = \sum_{\nu=1}^n Z_{i\nu}$, mit $Z_{i\nu} = S_i^{-1} D_{i\nu} S_i$.

Dann gilt: Ein beliebiges Polynom der X_i kann stets in der Form eines Normalpolynoms der $Z_{i\nu}$ höchstens vom Grade mn dargestellt werden, dessen Koeffizienten Polynome in den Spuren der $Z_{i\nu}$ sind.

H. L. Schmid (Berlin).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Klein-Barmen, Fritz: Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementarverknüpfung. Math. Z. 47, 85—104 (1940).

Eine Menge von Elementen, für die eine assoziative Verknüpfung ab erklärt ist, heißt ein Assoziativ; ein \mathfrak{A} -System ist ein Verband, der in bezug auf eine dritte Verknüpfung ein Assoziativ ist. Gilt im Assoziativ noch das Gesetz: Aus $ab = a'b$ folgt $a = a'$ und aus $ab = ab'$ folgt $b = b'$, so erhält man eine Halbgruppe. Ein Verband, der in bezug auf eine dritte Verknüpfung eine Halbgruppe ist, heißt \mathfrak{B} -System. Verf. betrachtet drei Kopplungsaxiome in \mathfrak{A} - und \mathfrak{B} -Systemen M : (I) Für a, b aus M gilt $(a \cup b)(a \cap b) = ab$; (II') für a, b, c aus M gilt $a(b \cup c) = ab \cup ac$; (II'') für a, b, c aus M gilt $a(b \cap c) = ab \cap ac$. Bereits in \mathfrak{A} -Systemen folgt (I) aus (II') und (II''), jedoch gibt es Beispiele sogar von \mathfrak{B} -Systemen, die (II') erfüllen, ohne (I) zu erfüllen. In einem \mathfrak{B} -System folgt aus (I) die Distributivität des Verbandes, ferner aus (I) und (II'') die Eigenschaft (II'). Beides ist in \mathfrak{A} -Systemen nicht der Fall. G. Köthe.

Fedosjeff, M.: Über einen Typus von Systemen mit zwei Operationen. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 18, 39—53 u. deutsch. Zusammenfassung 54—55 (1940) [Ukrainisch].

Es werden Systeme mit zwei Operationen axiomatisch untersucht, die Verallgemeinerungen des Systems der positiven rationalen Zahlen sind, wenn seine Elemente durch die Multiplikation und die Bildung des größten gemeinsamen Teilers verknüpft werden (vgl. hierzu Suschkewitsch, dies. Zbl. 10, 245). Dabei bleiben auch im allgemeinen Falle die Eigenschaften dieses Mustersystems weitgehend erhalten, was sich am Begriff des ganzen und des zu einem ganzen reziproken Elements, sowie an den Teilbarkeitssätzen und einer Verallgemeinerung der Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zeigt. In gewissen Fällen, nämlich bei Endlichkeit der Teilerketten, gibt es auch Primelemente, die ähnliche Eigenschaften wie die Primzahlen haben. An 13 ganz verschiedenartigen Beispielen wird die Nützlichkeit der allgemeinen Begriffsbildungen gezeigt.

H. Brandt (Halle, Saale).

Schneidmüller, V. I.: On rings with finite decreasing chains of subrings. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 579—581 (1940).

Im Ring R möge jede abnehmende Kette von Unterringen im Endlichen abbrechen.

Dann hat jedes Element in der additiven Gruppe von R endliche Ordnung. R ist direkte Summe von solchen Ringen, in denen diese Ordnungen immer Potenzen einer Primzahl sind. Das Radikal \mathfrak{R} von R ist abzählbar; der Restklassenring R/\mathfrak{R} ist direkte Summe von vollen Matrixringen über solche Körper K , die selber die Unterring-Kettenbedingung erfüllen. Ist R lokal endlich, d. h. erzeugen je endlich viele Elemente von R einen endlichen Ring, so sind alle Körper K Galoisfelder, und umgekehrt: wenn alle K kommutativ sind, so ist R lokal endlich. In diesem Fall ist R auch abzählbar. Ob es Ringe R mit der vorausgesetzten Kettenbedingung gibt, die nicht lokal endlich sind, ist nicht bekannt.

van der Waerden (Leipzig).

Mori, Shinziro: Allgemeine Z.P.I.-Ringe. J. Sci. Hiroshima Univ. A 10, 117—136 (1940).

K. Kubo (s. dies. Zbl. 23, 102) charakterisiert diejenigen kommutativen Ringe, in denen sich jedes vom Gesamtring und vom Nullideal verschiedene Ideal eindeutig als Produkt von endlich vielen Primidealen darstellen läßt. Dabei ist der Eindeutigkeitsbegriff so scharf gefaßt, daß auch das Auftreten von überflüssigen (einfach weglaßbaren), vom Gesamtring verschiedenen Primidealfaktoren ausgeschlossen sein soll. Unter dieser Bedingung erhält man (mit leichter Ergänzung der von Kubo selbst gewonnenen Ergebnisse) den Hauptsatz: Ein kommutativer Ring mit eindeutiger Primidealzerlegung ist entweder ein Integritätsbereich, für den die bekannten Noetherschen fünf Axiome gelten, oder ein „primärer, zerlegbarer Ring“, d. h. ein Ring mit Einselement, der an Idealen nur ein einziges Primideal \mathfrak{p} und seine Potenzen enthält, wobei für einen hinreichend großen Exponenten $\mathfrak{p}^n = (0)$ wird. — Unter einem Z.P.I.-Ring versteht Verf. einen kommutativen Ring, der weder nullteilerfrei zu sein noch ein Einheitsselement zu enthalten braucht, und in dem sich jedes Ideal als Produkt von endlich vielen Primidealen darstellen läßt; Eindeutigkeit der Darstellung wird im Gegensatz zur Arbeit von K. Kubo nicht gefordert. Der Begriff des Z.P.I.-Ringes ist also so weit gefaßt wie irgend möglich. Als Hauptergebnisse seien hervorgehoben: Alle Z.P.I.-Ringe sind O-Ringe, also Ringe mit Maximalbedingung (Teilerkettensatz). — Ein O-Ring mit Einheitsselement ist dann und nur dann ein Z.P.I.-Ring, wenn bei keinem maximalen Ringprimideal \mathfrak{p} zwischen \mathfrak{p} und \mathfrak{p}^2 ein echtes Zwischenideal liegt (die für die japanische Richtung der abstrakten Idealtheorie charakteristische „Sonosche Bedingung“). — Die Z.P.I.-Ringe mit Einheitsselement sind nichts anderes als die bereits 1925 von W. Krull (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1925, 5. Abhandl.) in ihrem Aufbau genau beschriebenen „Multiplikationsringe mit Maximalbedingung“. — Ein Ring \mathfrak{R} ohne Einheitsselement ist dann und nur dann ein Z.P.I.-Ring, wenn er eine direkte Zerlegung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \mathfrak{m}$ besitzt, wobei \mathfrak{R} einen (eventuell nur aus dem Nullelement bestehenden) Körper darstellt, während \mathfrak{m} ein O-Ring ohne Einheitsselement ist, der kein von (0) und \mathfrak{m} verschiedenes Primideal enthält, und in dem zwischen \mathfrak{m} und \mathfrak{m}^2 kein echtes Zwischenideal liegt.

Krull (Bonn).

● **Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.** Bd. 1: Algebra und Zahlentheorie. Tl. 1: A. Grundlagen. B. Algebra. 2., völl. Neubearb. Aufl. Hrsg. v. H. Hasse u. E. Hecke. H. 5. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1939. 135 S. u. 7 Abb. RM. 9.60.

Krull, Wolfgang: Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie. 12, 1—53.

Dieser Artikel der 2. Auflage des ersten Bandes der Enzyklopädie tritt etwa an die Stelle der drei Artikel IB 1a, b, c der 1. Auflage (Rationale Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen; arithmetische Theorie algebraischer Größen), die im Jahre 1899 abgeschlossen worden sind und daher nichts von den umfangreichen neueren Forschungen enthalten, die auf diesem Gebiete seither in engstem Zusammenhang mit der modernen Idealtheorie gemacht worden sind. Es ist das besondere Verdienst des Verf., diese weitverzweigten und oft auseinander strebenden Entwicklungen aus einem einheitlichen Gesichtspunkt geordnet und in allen wesentlichen Zügen dargestellt zu haben. — Der Artikel zerfällt in drei Teile, von welchen der erste die Grundlagen

der Idealtheorie in Polynombereichen bringt; hier wird auf Grund des Hilbertschen Basissatzes sofort der Anschluß an den vorausgehenden Artikel desselben Verf. (I 1, 11: Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie; dies. Zbl. 23, 4) gewonnen und die naheliegenden Folgerungen (Laskerscher Satz usw.) gezogen. Es folgt ferner eine ausführliche Darstellung der van der Waerdenschen Nullstellentheorie und der Dimensionstheorie. Der zweite Abschnitt (Eliminationstheorie) ordnet u. a. die Hentzeltsche Eliminationstheorie und die Vielfachheitstheorie van der Waerdens neu ein. Im dritten Abschnitt (Weiterer Ausbau der Polynomidealtheorie) stellt Verf. die mit der Hilbertschen Funktion zusammenhängenden, teilweise neueren Forschungen voran und behandelt dann die von Macaulay herrührenden Begriffe: Inverses System und Perfekte Ideale; in den beiden letzten Nummern werden die besonders auf die algebraische Geometrie hin gerichteten Forschungen über die Singularitätenmännigfaltigkeiten und die Transformationstheorie der Polynomideale dargestellt. Gröbner (Wien).

Mori, Shinziro: Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II. J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 145—155 (1939).

Anknüpfend an eine frühere Arbeit (vgl. dies. Zbl. 18, 200) beweist der Verf. als Hauptergebnis den folgenden Satz: In einem Integritätsbereich J mit Einheitsselement läßt sich dann und nur dann jedes Hauptideal als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen, wenn a) jedes minimale Primoberideal eines beliebigen Hauptideals aus J umkehrbar ist, und b) jede mit einem beliebigen Hauptideal (a) beginnende Idealquotientenkette $(a):a_1 \subset (a):a_2 \subset (a):a_3 \subset \dots$ nach endlich vielen Gliedern abbricht. Krull (Bonn).

Zahl- und Funktionenkörper:

Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 17, Nr 12, 1—134 (1940).

Der Verf. verwendet seine allgemeine Theorie der Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung und die damit zusammenhängende Theorie der Operatoren T_n^t auf Modulformen (dies. Zbl. 15, 402; 16, 355), um neue arithmetische Einsichten über positive quadratische Formen zu erhalten. $Q(x_1, \dots, x_r)$ sei eine ganzzahlige positive quadratische Form mit gerader Variablenzahl f und der Diskriminante

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}f} \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial x_r \partial x_s} \right| = (-1)^{\frac{1}{2}f} |a_{rs}|,$$

wenn (a_{rs}) die (ganzzahlige) Matrix von $2Q$ ist. Ist (A_{rs}) die zu (a_{rs}) adjungierte Matrix, $\delta = (\frac{1}{2}A_{11}, \dots, \frac{1}{2}A_{rr}, A_{12}, \dots, A_{r-1,r})$, so heißt $N = |\Delta|/\delta$ die Stufe von Q ; sie ist bis auf Faktoren 2 der höchste Elementarteiler von (a_{rs}) . (A_{rs}/δ) ist die Matrix einer geraden quadratischen Form $2Q^*$, Q^* heißt die (primitive) Adjungierte von Q . $\varepsilon(n)$, durch $\varepsilon(n) = \begin{pmatrix} \Delta \\ n \end{pmatrix}$ für $n > 0$ und durch $\varepsilon(n) = (-1)^{\frac{1}{2}f} \varepsilon(-n)$ für $n < 0$ definiert, heißt der Charakter von Q ; $(-\frac{1}{2}f, N, \varepsilon(n))$ der Typus von Q . Bedeutet $P_\nu(x_1, \dots, x_r)$ eine Kugelfunktion ν -ter Ordnung hinsichtlich Q , so ist

$$\vartheta(\tau, P_\nu, Q) = \sum_n P_\nu(n_1, \dots, n_r) e^{2\pi i \tau Q(n_1, \dots, n_r)}$$

eine Modulform vom Typus $(-\frac{1}{2}f + \nu, N, \varepsilon(n))$, d. h. eine Modulform der Dimension $-\frac{1}{2}f - \nu$ und der Stufe N vom Teiler N (d. h. $F \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F(\tau+1) = F(\tau)$ mit $F \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix} = \varepsilon(n) F$).

Für $\nu > 0$ ist ϑ eine Spitzenform. Der Thetareihe $\vartheta(\tau, P_\nu, Q)$ wird die Dirichletreihe $\varphi(s, P_\nu, Q) = \sum_n P_\nu(n) Q(n)^{-s}$ zugeordnet. Weiter wird jeder Thetareihe $F(\tau) = \sum a(m) \exp(2\pi i \tau m)$ der Stufe N die reduzierte Reihe $\tilde{F}(\tau) = \sum_{(N, m)=1} a(m) \exp\left(\frac{2\pi i \tau}{N} m\right)$ und entsprechend der zu-

gehörigen Dirichletreihe $\varphi(s) = \sum_m a(m) m^{-s}$ die reduzierte Reihe $\tilde{\varphi}(s) = \sum_{(N, m)=1} a(m) m^{-s}$ zugeordnet.

Es gilt: Die reduzierte Reihe $\tilde{\varphi}(s, P_\nu, Q)$ ist eine eindeutig bestimmte Linearkombination von kanonischen Eulerprodukten, die Reihe $\varphi(s, P_\nu, Q)$ selbst wenigstens dann, wenn $\begin{pmatrix} \Delta \\ n \end{pmatrix}$ ein eigentlicher Charakter modulo N ist. Ein kanonisches Eulerprodukt ist dabei ein über alle Primzahlen erstrecktes Produkt $\varphi(s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1-2s})^{-1}$, wenn die ihm ent-

sprechende Thetareihe eine Modulform $(-k)$ -ter Dimension der Stufe N mit dem Teiler t und dem Charakter $\varepsilon(n)$ ist, und wenn außerdem $a_p = 0$ für $p \mid \left(t, \frac{N}{t}\right)$ ist. Im vorliegenden

Fall ist $t = N$, $k = \frac{1}{2}f$. Zur Erläuterung sei erwähnt, daß für binäre Formen dieser Satz auf die Darstellung der einzelnen Formenklassen zugeordneten Zetafunktionen als Linearkombinationen der Dirichletschen L -Reihen zur absoluten Idealklasseneinteilung im zugehörigen imaginärquadratischen Zahlkörper hinausläuft; die L -Reihen haben ja Eulerentwicklungen. Bei den binären Formen ist auch wohl bekannt, daß nur die L -Reihen zu einem eigentlichen Charakter ein über alle Primzahlen erstrecktes Eulerprodukt haben. Der Satz wird aus entsprechenden allgemeineren Aussagen über Modulformen hergeleitet. Für $P_v = 1$ enthält er Aussagen über den Aufbau der Darstellungsanzahlen $a(m)$ natürlicher Zahlen m durch Q aus den Darstellungsanzahlen $a(p)$ der Primzahlen p . — Zur Berechnung der Eulerprodukte, in die ein gegebenes $\varphi(s)$ zerfällt, ist die von $\vartheta(\tau)$ erzeugte, bei allen Heckschen Operatoren invariante Schar von Modulformen zu ermitteln, da die entsprechende Schar von Dirichletreihen von den gesuchten Eulerprodukten aufgespannt wird. Für die Modulformen $f(\tau)$ mit $f(\infty) = 0$ zeigt der Verf., daß die endlich vielen Funktionen $f|T_m^N$ mit $1 \leq m \leq K = k \frac{\mu_0(N)}{12} + 2$ die

von f erzeugte Schar aufspannen, $\mu_0(N)$ ist der Index der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ in der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$. Ist $f(\infty) \neq 0$, so ist zuerst eine passende Eisensteinreihe $E(\tau)$ zu subtrahieren, deren Verhalten bei den Heckschen Operatoren aber leicht zu überblicken ist. Dabei kann sogar gleich erreicht werden, daß $f(\tau) - E(\tau)$ eine Spitzenform ist; für $N = q = \text{Primzahl}$ wird $E(\tau)$ explizit angegeben. Kehren wir zu dem Fall zurück, daß $f(\tau) = \vartheta(\tau, P_v, Q)$ eine Thetafunktion ist, so zeigt sich, daß durch ein finites rationales Rechenverfahren aus den $F|T_n^N$, $n \leq K$, $F = \vartheta - E$ eine Basis F^1, \dots, F^K der von f erzeugten Schar berechnet und die zugehörigen Dirichletreihen $\varphi^e(s)$ mit Hilfe konstanter quadratischer Matrizen B^e zu einer Matrix $\Phi(s) = \sum \varphi^e(s) B^e$ vereinigt werden können, die eine kanonische Eulerentwicklung hat (siehe Hecke, a. a. O., und Petersson, dies. Zbl. 21, 22). Es ist nun weiter zu untersuchen, wie die so erhaltenen Eulerprodukte von der Ausgangsform Q abhängen, wobei man die bekannten Verhältnisse bei binären Formen, wo die Eulerprodukte der L -Funktionen explizit bekannt sind, vor Augen haben muß. Eine vollständige Lösung dieser Fragen kann heute noch nicht gegeben werden. Es sei bemerkt, daß man in der von $\vartheta(\tau, Q)$ erzeugten invarianten Schar nicht immer mit Thetareihen zur gleichen Diskriminante auskommt, sondern unter Umständen auch Formen anderer Diskriminante, aber zur gleichen Stufe heranziehen muß. Mit anderen Worten: um zu Multiplikationsgesetzen für die Darstellungsanzahlen $a(m, Q)$ zu kommen, muß man nicht nur Formen ein und derselben Diskriminante, sondern auch andere, aber solche gleicher Stufe heranziehen. Die dahinter steckenden arithmetischen Tatsachen sind noch nicht erforscht. Spezielle Ausführungen über Formen der Diskriminante 1, und über Formen von Primzahlstufe q und quadratischer Diskriminante schließen sich an. Es sei nur ein Satz angeführt, der die Natur der oben schon erwähnten Multiplikativitätseigenschaften der Darstellungsanzahlen erkennen läßt: Q sei eine Form vom Typus $(-k, q, 1)$ und der Diskriminante q^{2t} , Q^* ihre primitive Adjungierte. Für die Darstellungsanzahlen $a(m, Q)$ und $a(m, Q^*)$ durch Q bzw. Q^* gilt dann

$$q^{t-1} a(m, Q) + i^k a(mq, Q^*) = c(m) + \frac{1}{q_k} (q^{t-1} + i^k) \sigma_{k-1}(m),$$

$$q^{k-t-1} a(m, Q^*) + i^k a(mq, Q) = c'(m) + \frac{1}{q_k} (q^{k-t-1} + i^k) \sigma_{k-1}(m).$$

Hierbei sind $c(m)$, $c'(m)$ die Entwicklungskoeffizienten je einer Spitzenform $(-k)$ -ter Dimension der Stufe 1, $q_k = \zeta(k) \Gamma(k) (2\pi i)^{-k}$ und $\sigma_{k-1}(m)$ die Summe der $(k-1)$ -ten Potenzen der positiven Teiler von m . Besonders bemerkenswert ist der Fall quaternärer Formen mit quadratischer Diskriminante, die mit den definiten Quaternionenalgebren zusammenhängen. Es ergibt sich eine Aussage über die Darstellungsanzahlen, die von H. Brandt arithmetisch bewiesen wurde. Zum Schluß wird eine Reihe von numerischen Beispielen gegeben. *Dewring.*

Humbert, Pierre: Note relative à l'article: Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques. Comment. math. helv. 13, 67 (1940).

Hinweis darauf, daß das Hauptresultat (Satz II) der früher (dies. Zbl. 23, 104) besprochenen Arbeit nicht neu ist. Vgl. M. Nagell, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 1, 144 (1922).

Inaba, Eizi: Über die Struktur der l -Klassengruppe zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrad l . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 4, 61—115 (1940).

Verf. gibt eine neue Methode zur Untersuchung der l -Klassengruppe \mathfrak{K} eines zyklischen Relativkörpers K vom Relativgrade l ($=$ Primzahl) über einem absolut algebraischen Grundkörper k von endlichem Grade. Als Klassen in K werden Strahl-

klassen nach einem beliebigen Modul zugelassen. Der Grundgedanke ist, solche Zahl- bzw. Idealgruppen in k zu konstruieren, die die Struktur von \mathfrak{K} spiegeln. Das Wichtige dabei ist, daß sich diese Gruppen durch die Primteiler der Relativediskriminante und Lösung gewisser Diophantischer Gleichungen in k bestimmen lassen. Allerdings ist die Lösung dieser Gleichungen im allgemeinen schwer, gestaltet sich aber in einfacheren Fällen verhältnismäßig leicht, und so führt die Methode zu konkreten, neuen Resultaten, teils aber werden alte Resultate auf diesem Wege wiedergewonnen (s. unten). Des näheren aus dieser langen Arbeit sei nur folgendes erwähnt. Es sei σ ein erzeugender Automorphismus von K/k . Für alle l -Klassen ist die $(1 - \sigma)^n$ -te symbolische Potenz bei genügend hohem n die Hauptklasse. Die l -Klassen, bei denen man mit einem festen n auskommt, bilden eine Gruppe \mathfrak{K}_n . Weiter sei jetzt der Spezialfall betrachtet, in dem die Klassenzahl in k zu l prim und in K die absolute Klasseneinteilung zugrunde gelegt ist. Dann ist \mathfrak{K} normal, d. h. für jedes Gruppenelement ist die $1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{l-1}$ -te Potenz das Einselement, und alle Faktorgruppen $\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1}$ ($n \geq 1$) sind vom Typus (l, l, \dots, l) . Aus jeder Basisklasse dieser Gruppe läßt sich ein Repräsentant wählen, der eine Primidealpotenz ist. Diese Repräsentanten erzeugen eine Gruppe \mathfrak{G}_n , und es bezeichnet \mathfrak{H}_n den Durchschnitt von \mathfrak{G}_n mit \mathfrak{K}_{n-1} . Die Zahlen, die Normen der Ideale aus \mathfrak{G}_n sind, bilden eine Gruppe G_n . Ähnlich entstehe H_n aus \mathfrak{H}_n . Es bezeichne noch G_0 die Gruppe der Einheiten in k und H_0 die Gruppe der Normen der Einheiten aus K . Die Zahlen von G_n , die durch Multiplizieren mit einer Zahl aus der Gruppe $G_{n-1}G_{n-2} \dots G_1G_0$ (darunter ist für $n=0$ die Einheit zu verstehen) in Zahlnormen übergehen, bilden eine Gruppe K_n ($n \geq 0$). Endlich sei \mathfrak{K}_1 die Gruppe derjenigen l -Klassen, die die ambigen Ideale repräsentieren (\mathfrak{K}_1 selbst ist die Gruppe der ambigen l -Klassen). Dann gelten die Isomorphismen $\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1} \cong G_n/H_n$ ($n \geq 1$), $\mathfrak{K}_{n+1}/\mathfrak{K}_n \cong K_n/H_n$ ($n \geq 1$), $\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_1 \cong K_0/K_0$. Im vorliegenden Spezialfall sind diese G_n , H_n , K_n die obenerwähnten Zahlgruppen. Im allgemeinen Fall ist erst $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_1$ normal, auch sind jetzt nur $\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1}$ ($n \geq 2$) vom Typus (l, l, \dots, l) . An Stelle von Zahlgruppen treten Idealgruppen auf, sonst ist dieser Fall dem vorigen ziemlich ähnlich. Aus den Anwendungen sei z. B. folgendes erwähnt. Enthält die Diskriminante des absolut kubischen zyklischen Zahlkörpers nur zwei Primzahlen p, q , so ist die Anzahl der durch 3 teilbaren Invarianten der 3-Klassengruppe dann und nur dann gleich 2, wenn p, q gegenseitig kubische Potenzreste voneinander sind. Auch werden einige Sätze von H. Reichardt und vom Ref. über quadratische Zahlkörper neu abgeleitet (s. dies. Zbl. 7, 396; 9, 51, 293). Es wird noch das Lösbarkeitskriterium einer Diophantischen Gleichung angegeben, die sich als Verallgemeinerung der Lagrangeschen Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ betrachten läßt.

L. Rédei (Szeged).

Tschebotarow, N. G.: Eine Aufgabe der algebraischen Zahlentheorie. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 283—290 (1940) [Russisch].

Russische Fassung der in deutscher Sprache erschienenen Abhandlung in Acta Arithmet. 2, 221—229 (1937) (dies. Zbl. 18, 51). H. Brandt (Halle a. S.).

Delaunay, B. N.: Zur Geometrie der Galoisschen Theorie. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 52—62 (1940) [Russisch].

In dieser Arbeit werden die ersten allgemeinen Umriss einer Theorie entworfen, welche Verf. „Geometrie der Galoisschen Theorie“ nennt. Auf diese Weise wird eine neue Darstellung der Galoisschen Theorie — nach der geometrischen Methode — erhalten. — Es werden Punktgitter des reellen oder komplexen R_n betrachtet, die bei komponentenweiser Multiplikation der Ortsvektoren abgeschlossen sind. Ein Gitter mit dieser Eigenschaft heißt maximal, wenn größere Gitter gleicher Dimension nicht mehr multiplikativ invariant sind. Jedes multiplikativ invariante Gitter läßt sich in ein maximales Gitter gleicher Dimension einbetten. Ein Gitter heißt irreduzibel, wenn aus dem Verschwinden einer Koordinate das Verschwinden aller Koordinaten eines Gitterpunktes folgt. Die Darstellung der Zahlen der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers als Punkte mit den algebraischen Konjugierten der Zahl als Koordinaten

liefert ein Gitter, das invariant bei koordinatenweiser Multiplikation, maximal und irreduzibel ist. Dasselbe gilt für die direkte Summe endlich vieler Gitter der eben erklärten Art. Nach Satz 1 ist auch die Umkehrung richtig. Weiter wird ein geometrischer Beweis für die Existenz unendlich vieler algebraischer Zahlkörper mit vorgegebenem Grad und vorgegebener Signatur angedeutet. Die weiteren Begriffsbildungen und Sätze sind einfache Übersetzungen der algebraischen Sprache von Galois in die Gittersprache, wobei zu beachten ist, daß nur mit ganzen algebraischen Zahlen und den zugehörigen Gitterpunkten operiert wird. Der Beweis des Hauptsatzes stützt sich auf die in dieser Arbeit nicht bewiesene Tatsache, daß es zu gegebener Untergruppe \mathfrak{S} vom Index ν der Automorphismengruppe \mathfrak{G} eines Zahlkörpers K stets ein unter \mathfrak{S} invariantes Element aus K mit ν verschiedenen konjugierten gibt. — Verf. stellt an einer Stelle die Frage, ob aus den Hauptordnungen einer Schar konjugierter algebraischer Zahlkörper die Hauptordnung ihres gemeinsamen galoisschen Oberkörpers allein durch fortgesetzte Addition und Multiplikation entstände. Ein Gegenbeispiel wird erhalten, wenn die Konstruktion von der Schar der drei zu $R(\sqrt[3]{2})$ konjugierten Zahlkörper aus begonnen wird.

Zassenhaus (Hamburg).

MacLane, Saunders, and O. F. G. Schilling: Normal algebraic number fields. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 122—126 (1940).

Voranzeige von offenbar sehr bedeutsamen Untersuchungen, die in den Trans. Amer. Math. Soc. erscheinen sollen. — Es sei k ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade über dem Körper der rationalen Zahlen; \mathfrak{p} bezeichne die Primideale von k . Die Klassenkörpertheorie liefert eine Beschreibung der Abelschen Erweiterungen von k in Worten der Idealklassen in k . Die Struktur der Idealklassengruppe wiederum läßt sich mit Hilfe der Gesamtheit der \mathfrak{p} -adischen Erweiterungen $k_{\mathfrak{p}}$ von k beschreiben. Die Verf. setzen sich zum Ziel, die Klassenkörpertheorie auf beliebige galoissche Erweiterungen K von k vom Grade n zu verallgemeinern. Es gelingt ihnen eine Verallgemeinerung des Artin-Symbols und des Normenrestsymbols. Mit Hilfe der neuen Symbole kann das Gesetz der Zerlegung unverzweigter Primideale beschrieben werden. — Von den neu eingeführten Begriffen sei hervorgehoben: $H_{\mathfrak{p}}$ bezeichne die Klasse der normalen, einfachen Algebren vom Index $m_{\mathfrak{p}}$ über $k_{\mathfrak{p}}$. Ein System $H = \{H_{\mathfrak{p}}, \text{ alle } \mathfrak{p}\}$ heiße eine „ideal algebra“ dann und nur dann, wenn für fast alle \mathfrak{p} (mit Ausnahme von endlich vielen) $m_{\mathfrak{p}} = 1$ ist. Mit Hilfe der Definition $H^{(1)} \times H^{(2)} = \{H_{\mathfrak{p}}^{(1)} \times H_{\mathfrak{p}}^{(2)}\}$, wenn $H^{(1)} = \{H_{\mathfrak{p}}^{(1)}\}$ und $H^{(2)} = \{H_{\mathfrak{p}}^{(2)}\}$, werden die „ideal algebras“ zu einer Gruppe H verknüpft. Sei $n_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}]$, wo \mathfrak{P} in \mathfrak{p} aufgeht. Verf. sagen, K zerfalle eine „ideal algebra“ H , wenn $n_{\mathfrak{p}} \equiv 0 \pmod{m_{\mathfrak{p}}}$ für alle \mathfrak{p} ist. H enthält als Untergruppe die Klassengruppe aller normalen einfachen Algebren S/k , welche von K zerfällt werden. „Algebren“ H bzw. S heißen relativ prim zu einem Divisor $\mathfrak{M} = \prod \mathfrak{P}^{\alpha}$ (in K), wenn kein $\mathfrak{P} \cap k$ ein Verzweigungsprimdivisor von H bzw. S ist. Die Gruppe aller „ideal algebras“, welche relativ prim zu \mathfrak{M} sind, heiße $H_{\mathfrak{M}}$. Sie enthält die Gruppe $S_{\mathfrak{M}}$. Die Bestimmung des Index $[H_{\mathfrak{M}} : S_{\mathfrak{M}}]$ bildet den Kernpunkt der Untersuchungen. Für Einzelheiten muß die angekündigte Hauptarbeit abgewartet werden. *H. L. Schmid.*

Deuring, Max: Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. 47, 34—46 (1940).

Nach v. d. Waerden (ZAG XI; dies. Zbl. 17, 373) lassen sich die regulären ebenen Kurven von gegebenem Geschlecht g und genügend hohem Grad n eindeutig und rational abbilden auf Punkte einer Modulmannigfaltigkeit M_g derart, daß zwei Kurven dann und nur dann denselben Bildpunkt haben, wenn sie birational äquivalent sind. Die Koordinaten des Bildpunktes heißen die Moduln der Kurve. Nun wird gezeigt, daß in jeder Klasse von birational äquivalenten Kurven eine solche vorkommt, deren Gleichungskoeffizienten rationale Funktionen der Moduln sind. Der Beweis wird zuerst für allgemeine Moduln geführt, unter Benutzung der Tatsache, daß die allgemeine Kurve vom Geschlechte $g > 2$ keine birationalen Transformationen in sich

gestattet, und dann auf spezielle Moduln übertragen. Die Übertragung geschieht mit Hilfe eines „Primdivisors“ eines Funktionenkörpers von mehreren Veränderlichen und ist dem Ref. in dieser Form nicht verständlich; jedoch läßt sie sich wohl auch mittels „relationstreuer Spezialisierung“ durchführen. Die Fälle $g = 1$ und $g = 2$ erhalten eine Sonderbehandlung. Alle Ergebnisse gelten auch für Körper von Primzahlcharakteristik
van der Waerden (Leipzig).

Deuring, Max: Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. 2. J. reine angew. Math. 183, 25—36 (1940).

Eine algebraische Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Funktionenkörpern K_1 und K_2 transformiert die Differentiale erster Gattung von K_1 in Linearkombinationen der Differentiale 1. Gattung von K_2 . Die Transformationsmatrix M ist Null für Korrespondenzen von der Wertigkeit Null und hängt daher nur von der größeren Äquivalenzklasse der Korrespondenz, dem Multiplikator α , ab. Dabei gilt $M_{\alpha+\beta} = M_\alpha + M_\beta$ und $M_{\alpha\beta} = M_\alpha M_\beta$, wenn α ein Multiplikator von K_1 in K_2 und β ein Multiplikator von K_2 in K_3 ist. Im Fall $K_1 = K_2 = K$ gehört zu jeder Korrespondenz \mathfrak{D} eine inverse Korrespondenz \mathfrak{D}^* und zu jedem Multiplikator μ somit ein Multiplikator μ^* . Dabei gilt $(\mu\nu)^* = \nu^*\mu^*$. Die Zuordnung $\mu \rightarrow \mu^*$ vermittelt somit einen involutorischen Antiisomorphismus des Multiplikatorenrings in sich, der im klassischen Fall von Rosati angegeben wurde. Mit Hilfe dieses Antiisomorphismus werden die Ergebnisse von Hasse neu gewonnen, die besagen, daß im Fall $g = 1$ der Multiplikatorenring entweder der Ring der ganzen rationalen Zahlen, oder eine Ordnung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers, oder aber eine Ordnung in einer bei 0 und p verzweigten Quaternionenalgebra ist ($p = \text{Charakteristik von } K$).
van der Waerden.

Zahlentheorie:

Sarantopoulos, Spyridion: Quelques théorèmes sur les nombres entiers. Bull. Soc. Math. Grèce 20, 85—100 (1940).

Der erste Teil der Arbeit enthält die Herleitung längst bekannter oder fast selbstverständlicher Sätze auf umständlichem Wege. Für das folgende Referat sei bemerkt: Alle vorkommenden Größen sind ganz, $\varphi(M)$ die bekannte Eulersche Funktion, d. h. die Anzahl aller zu M primen natürlichen Zahlen $\leq M$. Der Satz I: „Sind ε und ε_1 natürliche Zahlen $< M$, die Zahl u zu $\varphi(M)$ prim, so folgt aus $M \mid \varepsilon^u \pm \varepsilon_1^u$ die Gleichung $\varepsilon = \pm \varepsilon_1$ “ ergäbe sich fast sofort aus der Gruppeneigenschaft der $\varphi(M)$ zu M primen Restklassen mit Multiplikation als Composition. Die mit II bis VI bezeichneten Sätze des Verf. liegen dagegen tiefer. Von ihnen seien nur die beiden letzten hervorgehoben, da die vorhergehenden auf Spezialfälle des Satzes V im wesentlichen hinauslaufen, zu dessen Herleitung sie allerdings gebraucht werden. Im folgenden sei $\varepsilon = +1$ oder -1 , ebenso ε_1 . (V) Sind λ und u zu M prime, ungleiche, ungerade Primzahlen und ist M Teiler von $x^u \pm y^\lambda$, $xs^\lambda \pm \varepsilon$, $yt^u \pm \varepsilon_1$, aber nicht der Zahlen $A = (xs^\lambda \pm ys^u)/s^\vartheta$, $B = (xt^\lambda \pm yt^u)/t^\vartheta$, wobei $\vartheta = \min.(u, \lambda)$ ist, so gilt $M = R_1 R_2 R_3 Q$ mit $Q \mid A$, $Q \mid B$, $R_1 \mid A$, $R_2 \mid B$, dagegen $(R_2, A) = (R_1, B) = (R_3, AB) = 1$; es gilt weiter $R_1 \equiv 1 \pmod{\lambda}$, $R_2 \equiv 1 \pmod{u}$, $R_3 \equiv 1 \pmod{\lambda u}$, und jeder natürliche Primteiler eines R_i erfüllt dieselbe Kongruenz wie R_i selbst. — (VI) Ist $(x, y) = 1$, $[\lambda, \varphi(x^u \pm y^\lambda)] = 1$, so gibt es eine zu $x^u \pm y^\lambda$ prime Zahl s , so daß die beiden Zahlen $[xs^\lambda \pm (\mp \varepsilon)^{u-1} ys^u]/s^\vartheta$, wobei ϑ die frühere Bedeutung hat, und $ys^u \pm (\mp \varepsilon)^u$ sowie auch $xs^\lambda \pm \varepsilon$ durch $x^u \pm y^\lambda$ teilbar sind.

Holzer (Wien).

Beeger, N. G. W. H.: Extension of the table of least exponents ξ for which $2^\xi \equiv 1 \pmod{p}$. Nieuw Arch. Wiskde 20, 307—308 (1940).

Kraitchik hat 1924 eine Tafel der Zahlen $(p-1)/\xi$ für alle Primzahlen bis 300000 veröffentlicht. Verf. erweitert diese Tafel, indem er die Berechnung für die Primzahlen zwischen 300000 und 309671 durchführt. Zum Teil kann er dabei bekannte Kriterien heranziehen (z. B. für $p-1 = 2q$, 2^2q u. ä., $q = \text{Primzahl}$), im allgemeinen

bestimmt er jedoch unter Benutzung einer Rechenmaschine fortlaufend die Reste der Potenzen von 2, deren Exponent ein Teiler von $(p-1)/2$ ist. *Werner Schulz.*

Ducci, Enrico: Estensione della classica relazione pitagorica $3^2 + 4^2 = 5^2$. *Period. Mat.*, IV. s. **20**, 328—329 (1940).

Die Verallgemeinerung lautet:

$$\sum_{\nu=0}^n \{n(2n+1) + \nu\}^2 = \sum_{\mu=1}^n \{2n(n+1) + \mu\}^2.$$

Harald Geppert (Berlin).

Davenport, H.: On Waring's problem for fourth powers. *Ann. of Math.*, II. s. **40**, 731—747 (1939).

The author proves the following theorems: Every sufficiently large number is representable as the sum of 14 fourth powers, unless it is congruent to 15 or 16 (mod 16). Every sufficiently large number is representable as the sum of 15 fourth powers, unless it is of the form $16^h \cdot k$, where k has one of a finite number of values. Every sufficiently large number is representable as the sum of 16 fourth powers. Since $16^h \cdot 31$ is not representable as the sum of 16 fourth powers, the third theorem is the best possible result of this kind. This very considerable improvement on the earlier results of Estermann-Heilbronn-Davenport depends on a new method due to the author for constructing different numbers which are the sums of s positive integral k -th powers. This construction for $k=4$ results from the following lemma ($\varepsilon > 0$): Suppose $u_1 < u_2 < \dots < u_v < P^{\mu+3}$, $U > P^{3(1-\mu)-\varepsilon}$, where P, u_1, \dots, u_v are positive integers, $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. Then the number of integer solutions of $x^4 + u_i = y^4 + u_j$, subject to $P \leq x \leq 2P$, $P \leq y \leq 2P$ is $O(U^2 P^{3\mu-2+\varepsilon})$, when P is large, the symbol O only depending on ε . *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Hall, Newman A.: The number of representations function for binary quadratic forms. *Amer. J. Math.* **62**, 589—598 (1940).

Es handelt sich um das Problem, explizite Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch quadratische Formen zu finden. Die quadratischen Formen sollen primitiv, positiv und binär sein. Ferner soll es in jedem Geschlecht genau eine Klasse von Formen geben. Ist Δ die Diskriminante der Form $[a, b, c]$ und $\Delta < -4$, $(m, 2\Delta) = 1$, so ist die Anzahl N der Darstellungen von m durch $[a, b, c]$ gleich

$$N = \frac{1}{2^{h-1}} \prod_{i=1}^h [1 + C_i(a) C_i(m)] \sum_{\mu|m} \left(\frac{\Delta}{\mu} \right).$$

Dabei sind C_i die Charaktere, die zur Diskriminante Δ gehören. Ist $(m, 2\Delta) = t > 1$, so sind mehrere Fälle zu unterscheiden, die hier vollständig behandelt werden.

Hofreiter (Wien).

Reitan, L.: Einige Betrachtungen über ein zahlentheoretisches Gebiet. *Norsk mat. Tidsskr.* **22**, 110—115 (1940) [Norwegisch].

Verf. bestimmt die Anzahl der ganzen rationalen Lösungen einer Gleichung $m^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dabei werden alle Gitterpunkte auf der entsprechenden Kugel- fläche, die durch Vertauschung und Vorzeichenwechsel ineinander übergehen, zusammen als eine Lösung gerechnet, und zwar als eine 1-Lösung, $\frac{1}{2}$ -Lösung oder $\frac{1}{8}$ -Lösung, je nachdem die Anzahl jener Gitterpunkte gleich 48, 24 oder 6 ist. Die Lösungen werden dann in der Anzahlbestimmung mit ihren Zahlwerten 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$ gerechnet. Primär heißt eine Lösung, wenn x, y, z keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben. Für die Anzahl der primären Lösungen bekommt Verf. den Ausdruck $\frac{1}{8} [p_1^{n_1-1} (p_1-1) p_2^{n_2-1} (p_2-1) \dots q_1^{n_1-1} (q_1+1) q_2^{n_2-1} \cdot (q_2+1) \dots]$, wenn $m = 2^\mu \prod p_i^{n_i} \prod q_i^{v_i}$ ist und alle $p_i \equiv 1$ und alle $q_i \equiv 3 \pmod{4}$ sind. Der Beweis wird nur angedeutet, aber das Resultat stimmt mit der Hurwitzschen Formel $N = 6 \prod_i p_i^{n_i} \prod_j \left(q_j^{v_j} + 2 \frac{q_j^{v_j} - 1}{q_j - 1} \right)$

für die Anzahl aller ganzen Lösungen überein. (*L'intermédiaire des mathématiciens*, T. XIV, Paris 1907; vgl. nachstehende Bemerkungen von Th. Skolem.) *Bergström*.

Reitan, L.: Die Eulersche Funktion und ihr Zahlbaum. *Norsk mat. Tidsskr.* **22**, 116—118 (1940) [Norwegisch].

Bedeutet $\varphi(m)$ die Eulersche Funktion, so definiert Verf. nach und nach die Funktionen $\varphi^2(m) = \varphi(\varphi(m))$, $\varphi^3(m) = \varphi(\varphi^2(m))$, ... Es gibt dann eine kleinste Zahl r , für welche $\varphi^r(m)$ eine Potenz von 2, $\varphi^r(m) = 2^g$ ist. r nennt er den Rang von m und sagt, daß m zum g -ten Ast gehört. Dann konstruiert er einen Zahlbaum, wo die Äste von den Punkten 2^g auf dem Stamm ausgehen und r die Anzahl der Verzweigungen vom Stamm bis zu m angibt. Verf. behauptet, ohne einen Beweis dafür zu liefern, daß es Zahlen und Primzahlen von beliebigem Rang r gibt (vgl. nachstehende Bemerkungen von Th. Skolem). *Bergström* (Uppsala).

Skolem, Th.: Einige Bemerkungen zu L. Reitans Arbeiten. *Norsk mat. Tidsskr.* **22**, 119—123 (1940) [Norwegisch].

Zur vorstehenden Arbeit von Herrn L. Reitan macht Verf. einige Bemerkungen. Unter anderem zeigt er gemäß der Behauptung von Herrn Reitan, daß es Zahlen von beliebigem Rang und Primzahlen vom Range $r > n$ gibt, wo n beliebig groß ist. Ferner zeigt er, daß von jeder Zahl auf dem Zahlbaum nur endlich viele Zweige ausgehen, und daß jeder Zweig außer dem Stamm und den Zweigen, die durch die Zahlen $2^a 3^n$ (a beliebig, $n = 0, 1, 2, \dots$) gehen, endlich ist. *Bergström*.

Vinogradov, I. M.: A general property of prime numbers distribution. *Rec. math. Moscou*, N. s. **7**, 365—372 u. engl. Zusammenfassung 372 (1940) [Russisch].

Es seien α , σ und b Konstante, $0 < \alpha < 1$, $0 < \sigma < 1$, $b > 0$, und N eine natürliche Zahl ≥ 2 . Für eine positive reelle Zahl γ sei $\{\gamma\} = \gamma - [\gamma]$, wo $[\gamma]$ die größte ganze Zahl $\leq \gamma$ bezeichne. Mit Hilfe seiner Methode der Abschätzung trigonometrischer Summen für Primzahlen (siehe dies. Zbl. **21**, 391 und **22**, 311) beweist Verf. folgenden Satz: Für die Anzahl T der Primzahlen $p \leq N$ mit der Eigenschaft $0 \leq \{b p^\alpha\} < \sigma$ gilt

$$T = \sigma \pi(N) + O(N^{1+\eta} \Delta), \quad \Delta = (b N^{\alpha-1} + b^{-1} N^{-\alpha} + N^{-\frac{1}{2}\alpha})^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist η eine beliebige positive Konstante und $\pi(N)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq N$. Die Anzahl T ist auch gleich der Anzahl der Primzahlen $\leq N$, welche in Intervalle der Form

$$\beta c^m \leq p < (c + \sigma)^m, \quad \beta = b^{-m}, \quad m = \frac{1}{\alpha}$$

für alle möglichen ganzen Werte von c fallen. — Nach dem Auszug referiert.

H. L. Schmid (Berlin).

Yannopoulos, Constantin: Zur Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen. *Math. Z.* **47**, 105—110 (1940).

Die Arbeit schließt sich den Arbeiten von Bullig (dies. Zbl. **23**, 112—113) an. Es wird hier in einem Spezialfalle eine andere Abbildung von $B(V)$ auf die Ebene gegeben, als in der ersten Arbeit von Bullig; dabei werden die 2-Ecken auf konvexe (evtl. entartete) Sechsecke abgebildet, deren Seiten paarweise parallel sind. Der behandelte Spezialfall betrifft das durch die Vektoren $(1, 1, 1)$, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $(\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2)$ erzeugte Punktgitter, wo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ der Gleichung $x^3 - 8x + 6 = 0$ genügen.

Jarník (Prag).

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: On the almost periodic behavior of multiplicative number-theoretical functions. *Amer. J. Math.* **62**, 613—626 (1940).

Verff. setzen Untersuchungen (dies. Zbl. **22**, 311) fort für Fastperiodizität (B^1) [während dort nur $\lambda = 1$ und 2 vorkam] unter Weglassung der Einschränkung auf „stark“ multiplikative Funktionen. Das Ziel ist, Kriterien anzugeben dafür, daß eine multiplikative zahlentheoretische Funktion fastperiodisch (B^1) ist. An einem Beispiel wird gezeigt, daß Ramanujans Resultate sich auch auf Funktionen beziehen, die nicht fastperiodisch sind. Eine multiplikative Funktion $f(n)$ wird in Faktoren zerlegt

$= \prod_{m=1}^{\infty} f_m(n)$, von denen f_m zur m -ten Primzahl p_m gehört und die Eigenschaft hat:

$f_m(p^k) = 1$ für jedes k und jede Primzahl p , verschieden von p_m . Ein solches f_m wird prim-multiplikativ genannt. Theorem I—III befassen sich mit Funktionen $g(n)$, die die wesentliche Eigenschaft der prim-multiplikativen Funktionen verallgemeinern. Die hierdurch gewonnenen Aussagen werden durch Vermittlung der f_m für die multiplikative Funktion $f(n)$ nutzbar. Zu jeder multiplikativen Funktion $f(n)$ wird eine andere multiplikative Funktion $f^*(n)$ definiert durch $f^*(p^k) = p^{-k}[f(p^k) - f(p^{k-1})]$ und dann bewiesen: Theorem V. Wenn $\lambda \geq 1$ gegeben ist und f eine reelle nichtnegative multiplikative Funktion ist, dann ist f fastperiodisch (B^λ), wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |f^{\lambda*}(n)| < \infty$. Hierbei

entsteht $f^{\lambda*}$ aus f^λ in derselben Weise wie f^* aus f , und f^λ ist die λ -te Potenz von $f(n)$. Theorem VI bezieht sich auf Fastperiodizität (B) und gibt die Fourierentwicklung mit Hilfe der Ramanujansummen. Zum Schluß werden die expliziten Berechnungen durchgeführt für die Funktionen $\sigma_\alpha(n) n^{-\alpha}$, $n^{-1}\Phi(n)$, $n/\Phi(n)$, wo $\sigma_\alpha(n)$ die Summe der α -ten Potenzen der Divisoren von n und Φ die Eulersche Funktion ist. *Kienast*.

Erdős, Paul, and Aurel Wintner: Additive functions and almost periodicity (B^2). Amer. J. Math. 62, 635—645 (1940).

Eine Funktion $f(n)$ wird additiv genannt, wenn $f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2)$ für $(n_1, n_2) = 1$; $f(1) = 0$, und multiplikativ, wenn $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$ für $(n_1, n_2) = 1$; $f(1) = 1$. Verff. knüpfen an die vorstehend besprochene Arbeit an, in deren Resultaten entweder notwendige oder hinreichende Bedingungen dafür enthalten sind, daß eine multiplikative Funktion fastperiodisch (B^2) ist. Jene Resultate führen jedoch nicht zu einer Bedingung, die gleichzeitig notwendig und hinreichend ist. Verff. erörtern, warum dies nicht überraschen kann. Dagegen beweisen sie hier: eine additive Funktion $f(n)$ ist fastperiodisch (B^2) dann und nur dann, wenn beide Reihen $\sum_p p^{-1} f(p)$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_p p^{-l} |f(p^l)|^2$ konvergent sind. Der Beweis stützt sich auf ein früheres Ergebnis eines der Verff. (siehe dies. Zbl. 14, 154), das nur für ein reellwertiges $f(n)$ gilt, während hier $f(n)$ komplexwertig sein darf. Im Beweise wird von Resultaten der vorstehend besprochenen Arbeit Gebrauch gemacht. *Kienast* (Zürich).

Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On the almost periodicity of additive number-theoretical functions. Amer. J. Math. 62, 753—758 (1940).

In der vorstehend besprochenen Arbeit wurde bewiesen: Eine additive Funktion $f(n)$ ist fastperiodisch (B^2) dann und nur dann, wenn beide Reihen $\sum_p p^{-1} f(p)$, $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_p p^{-l} |f(p^l)|^2$ konvergieren. Durch eine Verfeinerung des Beweises wird hier bewiesen: Eine additive Funktion $f(n)$ ist fastperiodisch (B) dann und nur dann, wenn die vier Reihen $\sum_p p^{-1} f(p)$, $\sum_p p^{-1} |f(p)|^2$, $\sum_{l=2}^{\infty} \sum_p p^{-l} |f(p^l)|$, $\sum_{f(p) \geq 1} p^{-1} |f(p)|$ konvergieren.

Verff. weisen besonders darauf hin, daß im ersten Satz die Summe von $l = 1$ an, im zweiten Satz von $l = 2$ an zu nehmen ist. Am Schluß wird darauf hingewiesen, daß durch eine Anwendung der Ungleichungen von Hölder und Minkowski eine weitere Verallgemeinerung erzielt werden kann. Ein Resultat ist: Eine beschränkte additive Funktion ist entweder fastperiodisch (B^λ) für beliebig großes λ , oder sie ist überhaupt nicht fastperiodisch, auch nicht fastperiodisch (B^1). *Kienast* (Zürich).

Rankin, R. A.: Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. 3. A note on the sum function of the Fourier coefficients of integral modular forms. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 150—151 (1940).

Es sei $H(\tau)$ eine ganze Spitzenform N -ter Stufe der Dimension $-\kappa$ ($\kappa > 0$), die eine für $\Im(\tau) > 0$ absolut konvergente Fourierentwicklung besitzt: $H(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}$.

Unter Benutzung seiner Abschätzung der Summe $\sum_{n \geq x} |a_n|^2$ (Rankin, dies. Zbl. 21, 392) beweist Verf. in der vorliegenden Note

$$\sum_{n \geq x} a_n = O\left(x^{\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{10}}\right).$$

Vgl. hierzu A. Walfisz, dies. Zbl. 6, 207.

Z. Suetuna (Tokyo).

Gruppentheorie.

Krull, Wolfgang: Über separable, abgeschlossene Abelsche Gruppen. J. reine angew. Math. 182, 235—241 (1940).

Als erster Schritt auf dem Wege der Typisierung unendlicher abelscher Gruppen kann der angesehen werden: Bedingungen für die direkte Zerlegbarkeit einer solchen Gruppe in zyklische Summanden anzugeben. Für eine gewisse Klasse von abelschen Gruppen, nämlich die Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung besitzen und die abzählbar sind, ist ein solches Kriterium von Prüfer (Math. Z. 17, 35) angegeben worden. Zwecks Erweiterung des Gültigkeitsbereiches eines derartigen Kriteriums hat Prüfer die „idealen“ Gruppen eingeführt und für die idealen Gruppen von endlichem Range gezeigt, daß für diese eine solche Zerlegung gilt (Math. Z. 20, 165 u. 22, 222). Pietrkowski glaubte in einer Arbeit (dies. Zbl. 1, 200), in der er den Prüferschen Methoden eine mehr topologische Wendung gab, für separable „abgeschlossene“ abelsche Gruppen (zu denen auch die Prüferschen idealen Gruppen gehören) zeigen zu können, daß jede derartige Gruppe eine direkte Zerlegung in zyklische Summanden gestattet. Pontrjagin wies (dies. Zbl. 9, 156) durch ein Gegenbeispiel einen Fehler in den Pietrkowskischen Überlegungen nach. Verf. analysiert diesen Fehler in der obigen Arbeit näher und gibt sodann ein Kriterium für die Zerlegbarkeit separabler abgeschlossener abelscher Gruppen an. Es sei noch bemerkt, daß sich in diesem allgemeinen Falle separabler abgeschlossener abelscher Gruppen keine näheren Beziehungen zu den Untersuchungen Pontrjagins ergeben. *Ulm* (Münster i. W.).

Shiffman, Max: The ring of automorphisms of an Abelian group. Duke math. J. 6, 579—597 (1940).

Diese Arbeit schließt sich an die beiden Arbeiten von R. Baer [Proc. London Math. Soc. (2) 39 (1935); Amer. J. Math. 59 (1937); dies. Zbl. 12, 153; 18, 3] an. Zwischen den normalen Untergruppen (d. h. regulär charakteristischen Untergruppen, \mathfrak{o} -charakteristischen Untergruppen) einer Abelschen Gruppe A und gewissen zweiseitigen Idealen des Automorphismenringes \mathfrak{o} kann man bekanntlich zweierartige Zuordnungen aufstellen. Solche Ideale von \mathfrak{o} nennt der Verf. normale Ideale, die in dieser Arbeit rein ringtheoretisch charakterisiert werden. Eingehende Untersuchungen über normale Untergruppen von A und normale Ideale in \mathfrak{o} werden mitgeteilt. Dabei beschränkt Verf. sich durchweg auf Abelsche Gruppen A , deren Elemente endliche Ordnungen und endliche Höhen besitzen. *Shoda* (Osaka).

Easterfield, T. E.: The orders of products and commutators in prime-power groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 14—26 (1940).

Verf. beweist Satz A: P, Q seien zwei Elemente der Ordnung p^α bzw. p^β in einer p -Gruppe der Klasse c . Dann ist für $x \geq \beta + \left\lceil \frac{c-1}{p-1} \right\rceil$ die Gleichung $(PQ)^{p^x} = P^{p^x}$ erfüllt. Insbesondere ist die Ordnung von PQ nicht größer als p^m , wobei $m = \max\left(\alpha, \beta + \left\lceil \frac{c-1}{p-1} \right\rceil\right)$. Satz B: R_1 sei höherer Kommutator vom Gewicht r_1 in den Elementen P, Q, \dots einer p -Gruppe der Klasse c . Die Ordnung von R_1 mod dem $(r-1)$ -ten Zentrum der Gruppe sei p^{r_1} . Dann ist die Ordnung eines höheren Kommutators, der R_1 enthält und das Gesamtgewicht r besitzt, nicht größer als p^x , wobei $x = r_1 + \left\lceil \frac{c-r}{r_1(p-1)} \right\rceil$ ist. In beiden Sätzen darf c durch die kleinere Zahl $c^* = w + y - 1$

ersetzt werden, wenn $w \leq c$ und $\mathfrak{Z}_w(\mathfrak{G}) : \langle \mathfrak{Z}_w(\mathfrak{G})^p \rangle = p^y < p^{p-1}$ ist (dabei besteht \mathfrak{U}^n aus allen n -ten Potenzen der Elemente aus \mathfrak{U}). Der Beweis stützt sich auf die von Hall [Proc. London Math. Soc. (2), 36, 73—77 (1933); dies. Zbl. 7, 291] für den Beweis des 'expansion theorem' entwickelte Methode der Umformung von Produkten in Gruppen. Zassenhaus (Hamburg).

Schmidt, O. J.: Gruppen mit zwei Klassen nichtinvarianter Untergruppen. Gedenkw. D. A. Gravé, Moskau 291—309 (1940) [Russisch].

Verf. hat früher [Rec. math. Moscou 33, 161—172 (1926)] zwei Arten endlicher Gruppen mit genau einer Serie konjugierter, nichtinvarianter Untergruppen gefunden:

$$\mathfrak{G}_1: \quad N = p^a q, \quad P^a = Q^a = P Q P^{-1} Q^{-l} = 1;$$

$$\mathfrak{G}_2: \quad N = p^{n+1}, \quad P^p = P_1^p = P P_1 P^{-1} P_1^{-1} P^{p-1} = 1$$

und findet darauf aufbauend 8 mögliche Arten endlicher Gruppen \mathfrak{G} mit genau 2 Serien konjugierter, nichtinvarianter Untergruppen, nämlich: a) nichtnilpotente Gruppen: I: $N = p^a q r$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times (R)$, $R^r = 1$; II: $N = p^a q^2$, $P^p = Q^a = Q_l^a = P Q P^{-1} Q^{-l}$, $P \leftrightarrow Q_1$, $Q_1 \leftrightarrow Q$ [hier sind aber (P) , (PQ) , (QQ_1) 3 nichtkonjugierte und nichtinvariante Untergruppen, so daß dieser Typus wegfällt!]; III: $N = p^a q^2$, $P^p = Q^a = P Q P^{-1} Q^{-l} = 1$; IV: Tetraedergruppe; V: $N = p^n q$, $P^p = Q^a = P Q P^{-1} Q^{-b} = 1$; b) nilpotente Gruppen, die keine p -Gruppen sind: VI: $N = p^{n+1} q$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_2 \times (Q)$, $Q^q = 1$; c) p -Gruppen (der langwierigste Fall): VII: verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 16, $A^2 = (AB)^2 = B^4$; VIII: Diedergruppe der Ordnung 8. Hierbei bedeuten p, q, r verschiedene Primzahlen, l eine Zahl, für die $l \not\equiv 1 \pmod{q}$, $l^p \equiv 1 \pmod{q}$, b eine Zahl, für die $b^p \not\equiv 1 \pmod{q}$, $b^{p^2} \equiv 1 \pmod{q}$ ist, N die Gruppenordnung, $a > 0$, $n > 1$; $X \leftrightarrow Y$ steht für $XY = YX$. Zassenhaus (Hamburg).

Zappa, Guido: Sulla risolubilità di taluni gruppi finiti. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 19—27 (1940).

Sei die Ordnung der Gruppe G gleich $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, wo $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ voneinander verschiedene Primzahlen sind und $a_i \leq 3$, $i = 1, \dots, r$ ist. G ist auflösbar, wenn $p_1 \geq r + 1$ ist. Um diesen Satz zu beweisen, bemerkt man zunächst, daß er, falls für G richtig, für jede Gruppe gilt, deren Ordnung ein Teiler der Ordnung von G ist. Daraus folgt leicht, daß es genügt zu zeigen, daß G einfach ist. Dieser Beweis wird mittels zweier Hilfssätze erbracht. 1. Ist ν ein Element der Ordnung $p_i^{b_i}$, $b_i \leq a_i$ aus G und N sein Normalisator mit der Ordnung $p_i^{c_i} \cdot h$ ($c_i \leq a_i$), dann ist die Anzahl der Elemente von G , deren Ordnung durch kein p_1, \dots, p_i teilbar ist und die mit jedem zu ν konjugierten Element vertauschbar sind, nicht größer als $\frac{g}{p_i^{c_i}}$. 2. Ist P eine nichtabelsche Sylowgruppe der Ordnung p_i^3 von G und ν in P , aber weder im Zentrum von P noch im Zentrum einer anderen Sylowgruppe von G , dann ist die Anzahl der zu ν konjugierten Elemente in P nicht kleiner als $p_1 p_i$ (siehe ferner G. Zappa, dies. Zbl. 23, 14). J. J. Burckhardt (Zürich).

Morosov, V. V.: Über primitive Gruppen in drei Veränderlichen. Gedenkw. D. A. Gravé, Moskau 193—212 (1940) [Russisch].

Die von Lie längst geleistete Bestimmung dieser Gruppen wird hier auf einem neuen Wege durchgeführt. Während aber Lie acht Typen von primitiven endlichen kontinuierlichen Gruppen des R_3 gefunden hat, werden hier bloß sieben aufgestellt. Von einem zehngliedrigen Typus wird auf S. 212 gesagt, er sei mit der projektiven Gruppe eines linearen Komplexes ähnlich. Der betreffende Typus enthält aber drei paarweise vertauschbare infinitesimale Transformationen, also kann das nicht richtig sein. In der Tat ist auch dieser Typus mit der zehngliedrigen konformen Gruppe ähnlich, und die Gruppe des linearen Komplexes fehlt überhaupt in der Aufzählung des Verf. Es wäre aber verkehrt, wollten wir deshalb den neuen Weg des Verf. mit Stillschweigen übergehen. Dieser beruht darauf, daß ein von Tschebotareff in seiner

Theorie der Lieschen Gruppen (Tschebotareff, Theorie der stetigen Gruppen, im Druck) für den Fall der Ebene ausgeführter Gedanke auf den R_3 übertragen wird. Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe werden in der Umgebung des Koordinatenanfangs, der von allgemeiner Lage sein soll, nach Potenzen von x^1 , x^2 , x^3 entwickelt, und es werden die Glieder 1. O. betrachtet, die in den von Lie sogenannten infinitesimalen Transformationen 1. O. der Gruppe auftreten. Diese Glieder haben die Form:

$$\sum_{\alpha, \beta}^{1, 2, 3} a_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} p_{\beta},$$

erzeugen eine lineare homogene Gruppe und bilden, was man neuerdings Lieschen Ring nennt. Man kann sie durch die kovariante Matrix $|a_{\alpha}^{\beta}|$ bestimmen, und zwar ist diese Matrix in Wahrheit ein Bündel von Matrizen, linear abgeleitet aus einer Basis von solchen Matrizen. Soll nun die Gruppe primitiv sein, so muß es unter den Matrizen des Bündels mindestens eine geben, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat. Im Falle der Ebene hat das Tschebotareff direkt bewiesen, im Falle des R_3 erschließt es der Verf. aus einem Satze, den er für Bündel von dreireihigen Matrizen beweist und der eine Eigenschaft derjenigen Bündel von Matrizen ausspricht, bei denen jede dem Bündel angehörige Matrix eine charakteristische Gleichung hat, deren Wurzeln nicht sämtlich einfach sind. Auf diese Weise ergeben sich die Formen, welche die Glieder 1. O. in den infinitesimalen Transformationen 1. O. einer primitiven Gruppe möglicherweise haben können. Sodann wird untersucht, ob infinitesimale Transformationen höherer O. auftreten können, und es stellt sich heraus, daß höchstens solche von 2. O. vorkommen, deren mögliche Formen bestimmt werden. Nunmehr kann man die möglichen Zusammensetzungen der Gruppe ermitteln und schließlich die einzelnen Gruppen auf Normalformen zurückführen. Daß diese theoretisch vollkommene Methode bei der praktischen Durchführung ihre Schwierigkeiten hat, geht deutlich daraus hervor, daß dem Verf. das durch eine sechsgliedrige Basis bestimmte Matrizenbündel entgangen ist, das zu der zehngliedrigen projektiven Gruppe eines Linienkomplexes führt.

Engel (Gießen).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Maximoff, Isaiah: On a continuum of the power 2^{\aleph_i} . Ann. of Math., II. s. 41, 321—327 (1940).

Author studies higher continua $E_x^{(i)}$. The members of „continuous fractions“ are ordinal numbers $< \omega_i$. These fractions are transfinite sequences of types $\leq \omega_i$, either with last elements (rational numbers) or of type ω_i , naturally with certain identifications (cf. two fractions for a rational number). The theory is quite analogous to the ordinary case where $i = 0$.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Keldych, Ludmila: Démonstration directe du théorème sur l'appartenance d'un élément canonique E_{α} à la classe α et exemples arithmétiques d'ensembles mesurables B de classes supérieures. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 675—677 (1940).

L'auteur prouve directement que l'élément canonique E_{α} construit par elle récemment (ce Zbl. 23, 17) est un élément rigoureusement de classe α . Le procédé inductif qui le définit est constructif pourvu que le nombre ordinal α est „effectivement donné“.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Guaresehi, Giacinto: Alcune osservazioni sul comportamento di un insieme puntuale intorno ai suoi punti di accumulazione. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 414—420 (1940).

Im reellen euklidischen n -dimensionalen Raume sei I eine Punktmenge und P einer ihrer Häufungspunkte; jedem P ordnet Verf. zwei Zahlen zu: 1. die Dimension des Tangentialraumes in P an I (d. h. des linearen Raumes kleinster Dimension, der alle durch P gehenden uneigentlichen Sehnen von I enthält); 2. die Dimension des linearen Raumes kleinster Dimension, auf den man gegenseitig eindeutig die I -Umgebung von P projizieren kann. Verf. zeigt dann, daß, wenn I perfekt ist und jene

beiden Zahlen untereinander gleich sind und nicht von P abhängen, die Tangentialebene in P an I eine stetige Funktion von P ist. Dieses Ergebnis verallgemeinert einen Satz von Severi über Jordansche Mannigfaltigkeiten mit lauter einfachen Punkten (vgl. dies. Zbl. 9, 308). G. Scorza-Dragoni (Roma).

Freudenthal, Hans: Überdeckungen des Einheitskreises mit untereinander kongruenten Mengen. *Nieuw Arch. Wiskde* 20, 279—281 (1940).

Sei M eine aus endlich vielen fremden Teilbogen des Einheitskreises bestehende Menge, deren Maß $\mu(M) \geq 2\pi L$ ist. Es entstehe M_φ aus M durch eine Drehung um den Winkel φ . Es gibt keine nur von L abhängende Zahl p mit folgender Eigenschaft: Wie auch M gewählt sei, gibt es p Winkel $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ so, daß die M_{φ_k} zusammen den ganzen Einheitskreis überdecken. — Sei M eine meßbare Teilmenge der reellen Zahlen mod 1. $M - a$ entstehe aus M durch eine Verschiebung um die Länge a . Für die Durchschnittsmengen $M \cap (M - a)$ ist die untere Grenze $\inf_a \mu[M \cap (M - a)] \leq [\mu(M)]^2$. G. Hajós (Budapest).

Kametani, Shunji: Some remarks on Kakeya-Kunugi's theorem. *Jap. J. Math.* 17, 27—30 (1940).

Let A be a bounded plane set, and $S(z, r, \theta, \omega)$ be the closed sector bounded by the circle with radius r and center z , and two half lines issuing from z with angles $\theta + \omega, \theta - \omega$ ($0 < \omega < \pi/2$) respectively, with positive real axis. The author proves that if to every $z \in A$ there corresponds a sector $S(z, r, \theta, \omega)$ such that (i) $S(z, r, \theta, \omega)$ meets A only at z and (ii) θ depends on z but r, ω not, then A is of finite outer linear measure (in the Carathéodory sense). This generalizes the Kakeya-Kunugi theorem [*Proc. Imp. Acad. Tokyo* 13 (1937); this Zbl. 19, 299]. Izumi (Sendai).

Ergänzung eines Zitates in der Arbeit: Haupt-Nöbeling-Paue, Über Abhängigkeitsräume, dieses Journal 181 (1940), 193 ff. *J. reine angew. Math.* 183, 68 (1940).

Zu der im Titel genannten Arbeit siehe dies. Zbl. 22, 121. Hinweis auf Arbeiten von Nakasawa und anderen zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit (vgl. dies. Zbl. 12, 220; 13, 314; 16, 37). van der Waerden (Leipzig).

Gama, Lelio I.: Sur quelques points de la théorie des espaces abstraits et la notion d'accumulatif. *Ann. Acad. Brasil. Sci.* 12, 69—83 (1940).

Das Hauptresultat der Note ist folgendes Theorem: In einem metrischen Raum läßt sich jede erbliche Eigenschaft einer kompakten Menge in einem Punkt der abgeschlossenen Hülle der Menge lokalisieren. (Eine Eigenschaft E ist erblich, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Besitzt die Menge $M = M_1 + M_2$ diese Eigenschaft, so besitzt sie entweder M_1 oder M_2 ; besitzt die Teilmenge M' von M nicht die Eigenschaft, so auch keine Teilmenge von M' .) — Dieses Theorem wird in der Note auf mehrere Fragen von verschiedenem Interesse angewendet. L. Egedy.

Markouchevitch, A.: Sur certaines classes de transformations continues. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 28, 301—304 (1940).

$P^* = f(P)$ sei eine stetige Transformation einer offenen Menge G des n -dimensionalen reellen euklidischen Raumes in eine Menge desselben Raumes. Nach Stolz heißt die Transformation fast überall differenzierbar (in dem Sinne, daß die Koordinaten von P^* fast überall differenzierbare Funktionen derjenigen von P sind), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für fast alle Punkte P_0 aus G gibt es eine Umgebung $U(P_0)$ derart, daß 1) $P^* = f(P)$ eine eindeutige Abbildung zwischen $U(P_0)$ und ihrem Bild erzeugt; 2) in $U(P_0)$ eine Folge geschlossener $(n-1)$ -dimensionaler, P_0 im Innern enthaltender Jordanscher Hyperflächen $\{\Gamma_i(P_0)\}$ existiert, so daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_{i+1}(P_0)}{r_i(P_0)} > 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_i(P_0)}{R_i(P_0)} > 0, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{r_i^*(P_0^*)}{R_i^*(P_0^*)} > 0,$$

wobei $r_i(P_0)$ und $R_i(P_0)$ den Kleinst- bzw. Höchstwert des Abstandes von P_0 von einem variablen Punkt auf $\Gamma_i(P_0)$ bedeuten, während $r_i^*(P_0^*)$ und $R_i^*(P_0^*)$ eine entsprechende Bedeutung für $P_0^* = f(P_0)$ und die Transformierte der Hyperfläche $\Gamma_i(P_0)$ haben. G. Scorza-Dragoni (Padova).

Tolstoff, G.: La méthode de Perron pour l'intégrale de Denjoy. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 149—167 (1940).

Bekanntlich ist die Definition des Perronschen Integrals derjenigen des Denjoy-schen Integrals im engeren Sinne (vollständige Totalisation) gleichwertig. Auf Grund einer vorangehenden Untersuchung (vgl. dies. Zbl. 22, 212) gelingt es Verf., die Perron-sche Definition so zu verallgemeinern, daß sie mit der des Denjoyschen Integrals im weiteren Sinne (allgemeine Totalisation) gleichwertig wird. — Verf. nennt (D) -ableitbar in (a, b) jede in (a, b) stetige Funktion $F(x)$ derart, daß sich das Intervall (a, b) durch eine Folge perfekter Mengen P_n ($n = 1, 2, \dots$) überdecken läßt, so daß $F(x)$ auf jeder Menge P_n derivierbar wird. Eine solche Funktion ist notwendig im gewöhnlichen Sinne überall in (a, b) ableitbar mit Ausnahme höchstens einer abzählbaren Punktmenge. — Jede in (a, b) stetige und (D) -ableitbare Funktion $\varphi(x)$, für die $\varphi(a) = 0$ und überall in (a, b) mit Ausnahme höchstens einer abzählbaren Punktmenge $\varphi'(x) \geq f(x)$, $\varphi'(x) \neq -\infty$ ist, heißt eine Majorante von $f(x)$; analog wird eine Minorante $\psi(x)$ von $f(x)$ definiert. Die Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$ ist in (a, b) nichtabnehmend. Betrachtet man daher für ein festes x in (a, b) die Zahlenvorräte $\{\varphi(x)\}$ und $\{\psi(x)\}$ aller denkbaren Majoranten $\varphi(x)$ und Minoranten $\psi(x)$, so ist $\underline{\lim}\{\varphi(x)\} \geq \underline{\lim}\{\psi(x)\}$. In dieser Relation gilt sicherlich in ganz (a, b) das untere Zeichen, wenn dieses für $x=b$ gilt; in diesem Falle nennt man $f(x)$ (P) -integrabel in (a, b) , und man setzt $I = \int_{a(P)}^b f(x) dx = \underline{\lim}\{\varphi(b)\} = \overline{\lim}\{\psi(b)\}$. Verf. beweist den grundlegenden Satz, daß $f(x)$ dann und nur dann in (a, b) (P) -integrabel ist, wenn sie daselbst (D) -integrabel ist, und dann gilt $I = \int_{a(D)}^b f(x) dx$. Tullio Viola (Roma).

Guareschi, Giacinto: Sull'eliminazione del principio di Zermelo dalla dimostrazione del criterio di Severi sugli estremi relativi delle funzioni. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 110—112 (1940).

Die im Titel gekennzeichnete kritische Bemerkung bezieht sich auf den Beweis des folgenden Satzes von F. Severi: Ist $f(P)$ eine reelle stetige Funktion des in einer abgeschlossenen ebenen Punktmenge I veränderlichen Punktes P , so genügt es zur Feststellung der Tatsache, daß in einem Häufungspunkt P_0 von I die Funktion einen relativen Höchst- oder Tiefstwert annimmt, nachzuweisen, daß $f(P)$ diese Eigenschaft hat, wenn P sich P_0 derart nähert, daß die Halbgerade P_0P gegen eine beliebige, aber bestimmte Halbtangente λ von I in P_0 strebt. Tullio Viola (Roma).

Elsholz, L.: Zu der Frage über die Bestimmung der unteren Grenze der Anzahl der kritischen Punkte einer stetigen Funktion, die auf einem Raum, der keine Mannigfaltigkeit ist, bestimmt ist. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 455—461 u. deutsch. Zusammenfassung 461 (1940) [Russisch].

Verf. verallgemeinert die Morsesche Theorie der kritischen Punkte von Funktionen f , indem er auch Räume M betrachtet, die keine (geschlossenen) Mannigfaltigkeiten sind. Um eine gute Abschätzung der Anzahl kritischer Punkte von unten zu gewinnen, ist es zweckmäßig, neue Invarianten einzuführen. So diskutiert er die Änderung der Zusammenhangszahlen der Menge $f \leq x$ beim Durchgange von x durch eine kritische Stelle auf der Begrenzung der begrenzten Mannigfaltigkeit M .

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Elsholz, L.: Zur Theorie der Änderung der topologischen Invarianten der Niveauflächen. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 463—470 u. deutsch. Zusammenfassung 470 (1940) [Russisch].

Verf. führt gewisse ganzzahlige Invarianten abgeschlossener Mengen ein (vgl. vorsteh. Referat) und studiert sie für die Niveauflächen einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion auf einer Mannigfaltigkeit, insbesondere beim Durchgange durch kritische Stellen. Bedřich Pospíšil (Brünn).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. 7. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **22**, 29—33 (1939).

$f(x)$ bezeichne eine auf einer linearen Punktmenge E eindeutig definierte Funktion. Für jede endliche Gruppe von Punkten aus E (1) $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ werde gesetzt $\Delta_k^i(f) = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; f]$ mit $k = 0, 1, \dots, m-1$; $i = 1, 2, \dots, m-k$ (vgl. dies. Zbl. **9**, 59). Ein vom Verf. in der genannten Abhandlung bewiesener Satz wird hier folgendermaßen umgekehrt: Wenn für jedes Polynom P vom Grade n und für jede Punktgruppe (1) mit $m > n+2$ Punkten bei festgehaltenem k die Folge $\Delta_{n-k+1}^1(f-P), \Delta_{n-k+1}^2(f-P), \dots, \Delta_{n-k+1}^{m-n+k-1}(f-P)$ höchstens k Zeichenwechsel aufweist, so ist die Funktion f auf E von der Ordnung n . Anwendung auf den Fall $n=1$.
Tullio Viola (Roma).

Popoviciu, Tiberiu: Note sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. 8. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **22**, 34—41 (1939).

E sei eine beliebige Menge auf der reellen Achse mit der unteren bzw. oberen Grenze a, b ; \dot{E} bedeute die aus E durch Hinzufügung der nicht zu E gehörigen Häufungspunkte x von E , für die $a < x < b$ ist, entstehende Menge. Schnitt von E ist jede Teilmenge E_1 von E , die entweder aus einem einzigen Punkte besteht oder mit jedem Punktepaar x_1, x_2 von E_1 auch alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Punkte von E enthält. Umgebung V_x^k des Punktes x mit einem ganzen $k > 0$ heißt ein beliebiger Schnitt von E , der, falls x in E liegt, x und außerdem wenigstens k Punkte links und k Punkte rechts von x enthält; liegen links von x nur $r < k$ ($r \geq 0$) Punkte von E , so soll V_x^k diese alle und mindestens weitere $2k-r$ Punkte rechts von x enthalten; analog bei Vertauschung von rechts und links. — Hiernach heißt eine Funktion $f(x)$ lokal konvex, lokal nichtkonkav usf. von der Ordnung n auf E , wenn zu jedem x von \dot{E} eine Umgebung V_x^k existiert, auf der f konvex, nichtkonkav usf. von der Ordnung n ist (vgl. dies. Zbl. **9**, 59). Es werden die grundlegenden Eigenschaften der so definierten Funktionen untersucht.
Tullio Viola (Roma).

Miranda, Carlo: Un'osservazione su un teorema di Brouwer. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 5—7 (1940).

Le Relateur a communiqué dans une lettre à l'A.: L'énoncé de la proposition suivante: Si $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) sont n fonctions continues pour $|x_i| \leq L$, ($i = 1, 2, \dots, n$) et qui vérifient les inégalités suivantes

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) &\geq 0 \\ F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

il y a au moins une solution du système $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$). — L'A. montre que cette proposition est un corollaire du théorème de Brouwer sur les transformations continues, et que ce dernier théorème et la proposition en question sont parfaitement équivalentes.
S. Cinquini (Pavia).

Tambs Lyche, R.: Une courbe simple sans courbure. Norske Vid. Selsk., Forh. **12**, 49—52 (1939).

Verf. hat (dies. Zbl. **22**, 213) den analytischen Ausdruck einer im Intervall $(0, 1)$ stetigen und nirgends differenzierbaren Funktion $f(x)$ angegeben und stellt jetzt fest, daß auch $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dx$ explizit angegeben werden kann; es gilt nämlich für die in der Form $x = 2^{-\alpha_1} + 2^{-\alpha_2} + \dots + \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ zerlegte Zahl:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i - 2i + 3\} 2^{-2\alpha_i - 1} + \sum_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i - 2i + 2\} 2^{-\alpha_i} \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-\alpha_j}.$$

Diese Funktion stellt also eine Kurve mit stetiger Tangente dar, die in keinem Punkte eine Krümmung besitzt.
Harald Geppert (Berlin).

Jacobsthal, Ernst: Über die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Norske Vid. Selsk., Forh. 12, 74—75 (1939).

Nach De la Vallée-Poussin ist die einzige Lösung der im Titel genannten Funktionalgleichung $f(x) = cx$, falls man von $f(x)$ die Beschränktheit in einem festen (im übrigen beliebig kleinen) Intervall fordert. Hierfür gibt Verf. einen neuen Beweis, indem er mit $f(x_0) \neq 0$ $\Phi(x) = f(x_0)^{-1}f(x_0x) - x$ bildet und zeigt, daß Φ für jede rationale Zahl verschwindet, jede rationale Zahl zur Periode hat und für jedes rationale r der Gleichung $\Phi(rx) = r\Phi(x)$ genügt, woraus erst die Beschränktheit und dann das identische Verschwinden von $\Phi(x)$ erschlossen wird. Harald Geppert.

Analysis.

Allgemeines:

● **Picone, Mauro:** *Appunti di analisi superiore*. Napoli: Rondinella 1940. XVI, 847 pag. geb. L. 110.—.

Dem Vorwort nach will das Werk dem Jünger der Mathematik zu seiner analytischen Unterweisung und als Hilfsmittel der Forschung dienen. Es betont die mit den Naturwissenschaften verbundenen Zweige der Mathematik. Ihre Spaltung in eine „reine“ und „angewandte“ Mathematik lehnt Verf. ab und redet der Einheit dieser Wissenschaft das Wort, die s. E. gerade wegen der Anwendungen nicht hoch genug ausgebildet und mit genügend allgemeinem Inhalt erfüllt werden kann. Das Buch ist auch für Physiker und Ingenieure mit Nutzen lesbar; diese finden in ihm z. B. die in ihr Fach schlagenden Teile der Lehre von den Integralgleichungen. In der mathematischen Physik legt Verf. mehr Wert darauf, allgemeine Verfahren zu lehren, als Einzelaufgaben mit besonderen Kunstgriffen zu lösen. Der reiche Inhalt des ebenso weit in die Breite wie in die Tiefe reichenden Werkes läßt sich hier nur andeuten; er gliedert sich in sieben Abschnitte: I. Funktionentheorie. [Komplexe Integration. Sätze von Cauchy, Morera, Weierstraß, Laurent. Residuen. Anwendung auf die Berechnung uneigentlicher Integrale. Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen (V.).] II. Grundlehren von den harmonischen Funktionen (h. F.). [Ihre allgemeinen Eigenschaften. Kelvinsche Verwandlung. Innere und äußere Dirichletsche Aufgabe (D. A.). Analytisches Verhalten der h. F. zweier V. Integralsätze (von Green, Stokes, Gauß) in zwei und drei V. Neumannsche Aufgabe (N. A.) in der Ebene. Harmonische Reihen im Raume.] III. Grundeigenschaften der Fourierschen Reihen. [Die Fragestellung. Fouriersche Reihen in der Physik. Besselsche Ungleichung. Parsevalscher Satz. Einfachste Kennzeichen der Konvergenz. Funktionen beschränkter Schwankung, zweiter Mittelwertsatz und die Lehren von Jordan und Lebesgue. Reihenabschnitte. Bestimmung einer Funktion durch ihre Fourierschen Vorzeichen. Mittlere Konvergenz der Abschnitte. Besondere Beispiele Fourierscher Reihen.] IV. Laplacesche Funktionen und Reihen. [Hilfssätze über reelle Funktionen. Poissonsches Integral auf der Kugel. Kugelfunktionen n -ter Ordnung. Schläflis Ausdruck des Legendreschen Polynoms. Summenformel von Christoffel. Abschätzung der Kugelfunktionen. Poissonsche und gewöhnliche Summierung der Laplaceschen und Legendreschen Reihe.] V. Ergänzungen zur Lehre von den h. F. [Satz von Harnack. Singularitäten h. F. Satz von Poincaré-Hadamard-Noaillon. D. A., gemischte und N. A. für Kreisring und Kugelschale. Verwandlungen bei den Randwertaufgaben h. F. in zwei und drei V.: D. A. und N. A. für Halbebene und Halbraum, für die Ellipse. D. A. für Winkelraum und Streifen.] VI. Fouriersche und Legendresche Doppel- (und vielfache) Reihen. [In ähnlichem Aufbau wie III.] VII. Über einige klassische Gleichungen der mathematischen Physik. [Orthogonalisierung. Annäherung einer Funktion durch lineare Verbindungen gegebener. Annäherung im Mittel. Besselsche Differentialgleichung. Lineare Integralgleichungen: Iterierte Kerne. Lösender Kern. Eigenwerte und Eigenfunktionen. Versetzte Gleichung. Fredholmsche Sätze. Volterrasche

Integralgleichungen zweiter Art. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen. Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Ihre Größt- und Kleinst-Eigenschaften. Entsprechende Behandlung der Systeme von Integralgleichungen. Allgemeines über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Die allgemeinen Aufgaben von Cauchy und Dirichlet. Die zweite bei elliptisch-parabolischen nichtnegativen Gleichungen. Schwingungsartige und nichtschwingungsartige Vorgänge. Allgemeine Lösungsverfahren: Überführung der Aufgabe in eine Integralgleichung. Greensche Funktion. Verfahren der Abbildung; Beispiele: Laplacesche und Fouriersche Abbildung. Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen nach Ritz.]

L. Koschmieder (Graz).

Tambs Lyche, R.: Über den Satz von Rolle. Norsk mat. Tidsskr. 22, 105—109 (1940) [Norwegisch].

Der Beweis des Satzes von Rolle wird gewöhnlich auf den Existenzsatz zurückgeführt: Eine stetige Funktion in einem geschlossenen Intervall hat ein Maximum in diesem Intervall. Verf. gibt einen „konstruktiven“ Beweis des Satzes von Rolle mit Hilfe von Intervallschachtelungen, wobei er über den Konvergenzgrad des Verfahrens genaue Aussagen machen kann. Gegen G. Kowalewskis konstruktiven Beweis (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., S. 62) erhebt Verf. den Einwand, daß der Beweis nicht im üblichen Sinne konstruktiv sei, da i. a. nicht angegeben werden kann, mit welcher Genauigkeit gewisse Zwischenschritte ausgeführt werden müssen.

H. L. Schmid (Berlin).

Fubini, G.: Der Mittelwertsatz für nichtdifferenzierbare Funktionen. Publ. Inst. Mat., Rosario 2, 25—28 (1940) [Spanisch].

Für eine in einem Intervall stetige, nicht notwendig differenzierbare Funktion $f(x)$ läßt sich ein Mittelwertsatz beweisen; er besagt geometrisch, daß zu jeder Sekante der Kurve eine parallele Sekante gefunden werden kann, bei der die Endabszissen-differenz einen beliebigen vorgegebenen kleinen Wert h annimmt:

$$\frac{1}{k}(f(a+k) - f(a)) = \frac{1}{h}(f(a+\theta k+h) - f(a+\theta k)), \quad 0 < \theta < 1,$$

wobei bei gegebenen $f(x)$, a , k die Größe θ eine Funktion von h ist, für die $\lim_{h \rightarrow 0} \theta k$ existiert.

Harald Geppert (Berlin).

Levi, Beppo: Über einen Satz von Weierstraß, den Satz von Rolle und den vorangehenden Satz von Fubini. Publ. Inst. Mat., Rosario 2, 29—34 (1940) [Spanisch].

Der vorangehende Beweis von Fubini setzte den Abszissenwert einer (nach dem Weierstraßschen Satze notwendig vorhandenen) Extremstelle als bekannt voraus. Um über die reine Existentialaussage hinauszukommen, entwickelt Verf. einen neuen konstruktiven Beweis jenes Mittelwertsatzes, der im wesentlichen eine Schachtelungskonstruktion der extremumsverdächtigen Stellen ist.

Harald Geppert (Berlin).

Freudenthal, Hans: Eine Restabschätzung bei der Taylorsche Formel und ihre Anwendung auf die logarithmische und die binomische Reihe. Nieuw Arch. Wiskde 20, 269—272 (1940).

Wenn man in der Schlömilchschen Restformel $\psi(t) = (1 - ct)^n$ setzt, gelingt es mit ganz einfachen Abschätzungen sowohl für die logarithmische Reihe als auch für die binomische Reihe bei beliebigen Exponenten, den vollen Konvergenzbereich zu ermitteln, was bei Verwendung der Cauchyschen oder der Lagrangeschen Restformel nicht möglich ist.

F. Knoll (Wien).

Juškow, P. P.: Die Tabularmethode der annähernden Integration. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, Nr 4, 181—187 u. dtsch. Zusammenfassung 188 (1939) [Russisch].

L'au. démontre la formule de quadrature suivante: soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions définies dans l'intervalle (a, b) et possédant des dérivées continues $f'(x)$, $f''(x)$ et

$\varphi'(x)$. Alors on a
$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx + R,$$

où

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad |R| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} (3M_1N_1 + M_2N),$$

$M_1 = \max |f'(x)|$, $M_2 = \max |f''(x)|$, $N = \max |\varphi(x)|$, $N_1 = \max |\varphi'(x)|$, $a \leq x \leq b$.
N. Obreschkoff (Sofia).

Gonçalves, J. Vicente: Sur l'intégrale prise sur un contour variable. Portugaliae Math. 1, 343—345 (1940).

\mathfrak{C}_n sei eine Folge streckbarer Kurven beschränkter Länge; sie mögen in dem Sinne gegen eine Grenzkurve \mathfrak{C} streben, daß es auf \mathfrak{C} eine „dichte“ Menge $\{u\}$ gibt, deren Entsprechungen v_n auf \mathfrak{C}_n ebenfalls dicht liegen und gleichmäßig gegen $\{u\}$ streben: $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $|u - v_n| < \varepsilon_n$. [Die Zuordnung erfolgt durch Abbildung von \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_n auf ein festes Parameterintervall!] Unter dieser Annahme ist auch \mathfrak{C} streckbar. — Ist dann $f(x)$ integrierbar auf allen \mathfrak{C}_n , stetig auf \mathfrak{C} , so gilt $\int_{\mathfrak{C}_n} f(x) dx \rightarrow \int_{\mathfrak{C}} f(x) dx$. Ullrich.

Bonferroni, C. E.: Di uno speciale determinante formato con determinanti di Gram e di Landsberg. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 115—121 (1940).

Es seien $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ L -integrierbare reelle Funktionen des reellen, in einem Gebiete ω des Raumes S_k variablen Punktes P . Man nennt Landsbergsche Determinante die folgende

$$G_{uv} = \begin{vmatrix} \int u_1 v_1 dP & \dots & \int u_1 v_n dP \\ \dots & \dots & \dots \\ \int u_n v_1 dP & \dots & \int u_n v_n dP \end{vmatrix}, \quad (G_{uv} = G_{vu})$$

die sich auf die Gramsche reduziert, wenn $u_i = v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ist. Es seien u_i, v_i, \dots, w_i , $i = 1, 2, \dots, n$, m Gruppen von je n Funktionen. Nach Einführung der symmetrischen Determinanten

$$H_{uv\dots w} = \begin{vmatrix} G_{uu} & G_{uv} & \dots & G_{uw} \\ G_{vu} & G_{vv} & \dots & G_{vw} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{wu} & G_{wv} & \dots & G_{ww} \end{vmatrix}$$

beweist Verf., daß für jedes m , $H_{uv\dots w} \geq 0$. Ist $m = 2$, so hat man $H_{uv} = 0$ dann und nur dann, wenn die u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, linear äquivalent zu den v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sind, d. h. wenn die u_i lineare Kombinationen der v_i und die v_i solche der u_i sind. Es werden verschiedene Erweiterungen und genauere Bestimmungen gegeben. L. Cesari.

Rados, Gustav: Eine neue Herleitung der Gramschen Kriterien. Mat. természett. Ertes. 59, Tl 1, 7—16 u. dtsh. Zusammenfassung 17—18 (1940) [Ungarisch].

L'aut. démontre, qu'en posant

$$D = |f_i(x_j)|_{i,j=1,2,\dots,n},$$

pour le déterminant de Gram on obtient

$$(1) \quad G = \left| \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx \right|_{i,j=1,2,\dots,n} = \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b D^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

d'où découle le critère connu de linéaire dépendance. On trouve une formule analogue lorsque $f_i(x)$ sont des fonctions de la variable complexe x . La formule (1) est à rapprocher à une autre analogue, trouvée par Stieltjes (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes 1, 109) et démontrée par lui de la même manière. L'affirmation de l'aut. que la condition $G = 0$ est suffisante pour la dépendance linéaire dans (a, b) des fonctions $f_i(x)$, intégrables R dans (a, b) , n'est pas exacte. Les fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

sont intégrables R et linéairement indépendantes dans $(-1, 1)$. Le déterminant de Gram de ces fonctions est évidemment égal à zéro. *T. Popoviciu* (București).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Velmin, V. P.: Über einen Näherungsausdruck für e^x mittels algebraischer Funktionen. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 34—47 (1940) [Russisch].

In $\Phi(x, y) = \varphi_0 y^m + \varphi_1 y^{m-1} + \dots + \varphi_m$ sei φ_i ein Polynom von x von höchstens n_i -tem Grad ($i = 0, 1, \dots, m$). Hat der Exponent σ in der Entwicklung $\Phi(x, e^x) = A_\sigma x^\sigma + A_{\sigma+1} x^{\sigma+1} + \dots$ ($A_\sigma \neq 0$) den höchsten Wert, der bei gegebenen m, n_0, n_1, \dots, n_m möglich ist, so soll $\Phi(x, y)$ ein Polynom maximaler Ordnung (P. m. O.) in bezug auf das System m, n_0, n_1, \dots, n_m heißen. $\Phi(x, y) = 0$ stellt dann eine algebraische Kurve dar, die in $(0, 1)$ einen Berührungspunkt möglichst hoher Ordnung mit der Kurve $y = e^x$ hat. Durch Vorgabe des Systems m, n_0, n_1, \dots, n_m wird das zugehörige P. m. O. bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Es ist $\sigma = m + n_0 + n_1 + \dots + n_m$. Es wird ein Verfahren zur Bestimmung des P. m. O. bezüglich des Systems m, n_0, n_1, \dots, n_m aus einem P. m. O. bezüglich des Systems $m-1, n_0, n_1, \dots, n_{m-1}$ angegeben. Für eine Reihe von speziellen Systemen (wie $n_0 = n_1 = \dots = n_m = n$) wird die Bestimmung der P. m. O. eingehender behandelt. Für $m = 1, n_0 = n_1 = n$ ergeben

sich Polynome $\theta_n(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_n(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Der Ausdruck $\theta_n(x)/\theta_n(-x)$ führt auf die Euler-Lambertsche Kettenbruchentwicklung von e^x . *Wassiliĭ Höfding.*

Obreschkoff, N.: Neue Quadraturformeln. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1940, 1—20 (Nr 4).

Aus der Taylorentwicklung einer $(n+k+1)$ -mal differenzierbaren reellen Funktion leitet der Verf. durch Bildung Cesàroscher Mittel die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} A_n^k [f(a+h) - f(a)] &= \sum_{\mu=1}^n A_{n-\mu}^k \frac{h^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(a) \\ &- \sum_{\mu=1}^k (-1)^\mu A_{n-\mu}^{k-\mu} \frac{h^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(a+h) + A_n^k R_n \end{aligned} \right\}, \quad A_n^k = \binom{n+k}{n},$$

mit dem Restgliede

$$R_n = \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_a^{a+h} (a+h-t)^n (t-a)^k f^{(n+k+1)}(t) dt$$

her und gewinnt daraus durch Einführung von $F(x) = f'(x)$ eine allgemeine Quadraturformel. Der zuerst betrachtete Sonderfall $k = n$ liefert eine bereits von K. Petr [Časopis 44 (1915)] angegebene Formel und stellt eine Verallgemeinerung der Newtonschen Trapezformel dar; durch Intervallteilung entsteht daraus eine Verallgemeinerung der Simpsonschen Formel. Aus der allgemeinen Formel ($k \neq n$) werden Erweiterungen einer Maclaurinschen und der Newtonschen Quadraturformel entwickelt. Verf. zeigt an Zahlenbeispielen, daß seine Formeln genauere Näherungswerte liefern als die bekannten Quadraturformeln mit entsprechender Gliederzahl. *P. E. Böhmer.*

Jackson, Dunham: Orthogonal polynomials with auxiliary conditions. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 72—81 (1940).

Es werden Systeme von Polynomen $\{p_n(x)\}$ untersucht, die in einem endlichen Intervall der x -Achse gegenseitig orthogonal sind und gewisse zusätzliche lineare homogene Bedingungsgleichungen erfüllen. [Vgl. die frühere Arbeit desselben Verf.: A new class of orthogonal polynomials. Amer. Math. Monthly 46, 493—497 (1939), wo die speziellen Bedingungen $p_n(1) = \pm p_n(-1)$ untersucht werden, und die das gleiche Problem aus einem anderen Gesichtspunkt behandelnde Arbeit des Ref., dies. Zbl. 21, 308.] — Den Hauptzweck der Arbeit bilden die Konvergenzbeweise für die betreffenden Orthogonalreihen; daher beschränkt sich Verf. von vornherein auf solche Systeme von in $(-1, 1)$ orthogonalen Polynomen, für welche eine Christoffelsche

Formel ermittelt werden kann. Die größte Schwierigkeit liegt dann im Nachweis für die Beschränktheit der Polynome, wenigstens innerhalb eines ganz in $(-1, 1)$ gelegenen abgeschlossenen Intervalls. Diese Aufgabe wird durch Zurückführung auf die Legendreschen Polynome in einigen besonderen Fällen gelöst, wo Bedingungen von der Art $p_n(y_i) = \pm p_n(-y_i)$, $p'_n(1) = \pm p'_n(-1)$, $p_n(1) = h p_n(-1)$, $p''_n(1) = 0$ usw. vorliegen. Die Methode des Verf. ist noch verallgemeinerungsfähig, aber es scheint, daß eine wesentliche Verallgemeinerung ohne neue Gedanken nicht leicht erreichbar sein dürfte.

Gröbner (Wien).

Perron, Oskar: Über die Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome. Math. Z. 47, 57—65 (1940).

Eine Folge nichtnegativer, nicht identisch verschwindender trigonometrischer Polynome $P_n(x)$ heißt zulässig, wenn zu jedem Paar beliebig kleiner positiver Zahlen

ε, δ eine Zahl n_0 existiert, so daß $\int_0^{2\pi} \varepsilon P_n(t) dt > \int_0^{2\pi-\delta} P_n(t) dt$ für $n > n_0$ ist. Ist $f(x)$ eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen x und $f(x + 2\pi) = f(x)$, so wird $f(x)$ durch $Q_n(x)$, wobei

$$Q_n(x) \cdot \int_0^{2\pi} P_n(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) P_n(t - x) dt,$$

gleichmäßig approximiert $(f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x))$. Die von De La Vallée Poussin und Fejér benutzten Polynome erweisen sich als Sonderfälle. Setzt man die Funktionen $P_n(x)$ als Kosinuspolynome voraus, so kann man die Funktionen $Q_n(x)$ als summatorische Annäherungen von $f(x)$ auffassen. Es folgt dann für unstetige Funktionen $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} [f(x+t) + f(x-t)]$. Eine Verallgemeinerung auf „zulässige“ Polynome $P_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ und auf Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ von mehreren Veränderlichen ist leicht durchführbar.

F. Knoll (Wien).

Lozinski, S.: Sur la convergence forte des procédés d'interpolation. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 203—206 (1940).

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall $(0, 2\pi)$ definierte Funktion und $U_n(f; x)$ das trigonometrische Interpolationspolynom n -ter oder niedrigerer Ordnung, das in den Punkten $x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$, dieselben Werte wie $f(x)$ annimmt. — Wenn $f(x)$ beschränkt und in $(0, 2\pi)$ R -integrierbar ist (d. h. nach Mengoli-Cauchy), dann hat man für jedes $p > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f; x)| dx = 0.$$

Dieser Satz ist von J. Marcinkiewicz (dies. Zbl. 16, 19) nur für die stetigen, periodischen Funktionen bewiesen worden. Es sei außerdem $g(x)$ eine L -integrierbare Funktion, so daß auch $|g(x)| \log |g(x)|$ L -integrierbar ist. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} U_n(f; x) g(x) dx$

$= \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$. Die einfache L -Integrierbarkeit von $g(x)$ ist hier nicht ausreichend.

L. Cesari (Pisa).

Bergman, Stefan, and W. T. Martin: A modified moment problem in two variables. Duke math. J. 6, 389—407 (1940).

Untersuchungen über das Momentenproblem in zwei Veränderlichen, wo die quadratisch integrierbare Funktion Φ_1 gemäß

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi(v_1, v_2) v_1^{\lambda_n} v_2^{\mu_n} dv_1 dv_2 = y_n$$

zu bestimmen ist, bei gegebenen y_n und λ_n, μ_n ($R(\lambda_n) > -\frac{1}{2}$, $R(\mu_n) > -\frac{1}{2}$).

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Reihen:

Darevsky, W.: Sur certains problèmes de la théorie des séries divergentes. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 549—587 u. franz. Zusammenfassung 587—590 (1940) [Russisch].

L'auteur démontre des théorèmes pour l'étude de la possibilité de sommer une série donnée au moyen d'un certain ensemble de méthodes régulières: 1. Quelle que soit une série divergente et quel que soit le nombre fini γ , on peut toujours construire une méthode régulière qui est une méthode linéaire et une méthode des facteurs de convergence simultanément et telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ . 2. Quelle que soit une série divergente et quel que soit le nombre γ fini ou infini, on peut toujours construire au moyen d'une matrice fonctionnelle une méthode régulière telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ . 3. Soit M un ensemble de méthodes régulières telles que 1) chaque méthode de l'ensemble M est simultanément une méthode linéaire et une méthode des facteurs de convergence et 2) chaque méthode de l'ensemble M jouit de cette propriété qu'elle n'élargit pas les limites d'indétermination de la série à laquelle on l'applique. Alors, quelle que soit la série divergente et quel que soit le nombre γ compris entre les limites inférieure et supérieure de ses sommes partielles, on peut toujours indiquer une méthode de l'ensemble M telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ . — La seconde question traitée est le problème d'unicité. Enfin le théorème suivant est démontré: Soit donnée une méthode linéaire régulière. Quelle que soit la série divergente, on peut toujours, en intercalant entre ses termes une infinité dénombrable de zéros, construire une série qui n'est plus sommable par la méthode donnée. *N. Obreschkoff* (Sofia).

Garten, V.: Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen. Math. Z. 47, 111—124 (1940).

Verf. betrachtet die den gewöhnlichen Hölderschen Mitteln einer Folge s_n entsprechenden Integralmittel

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h^{(k-1)}(t) dt, \quad h^{(0)}(x) = s(x) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 < x \rightarrow \infty)$$

einer Funktion $s(x)$ und die den gewöhnlichen Cesàroschen Mitteln von s_n entsprechenden Rieszschen Mittel

$$c^{(k)}(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} s(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots; 0 < x \rightarrow \infty)$$

von $s(x)$. Daß der Äquivalenzsatz auch für diese Integralmittel gilt, hat E. Landau [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 65, 131—138 (1913)] gezeigt. Die Hauptlimites von $h^{(k)}(x)$ seien mit h_k und H_k ($h_k \leq H_k$), diejenigen von $c^{(k)}(x)$ mit c_k und C_k ($c_k \leq C_k$) bezeichnet, ferner sei $H_k - h_k = \Omega(H_k)$, $C_k - c_k = \Omega(C_k)$ gesetzt. — Zunächst gibt Verf. in übersichtlicher Weise eine permanente lineare Transformation M_k an, welche die Rieszschen in die Hölderschen Mittel gleicher Ordnung überführt, womit die eine Hälfte des Äquivalenzsatzes erneut bewiesen ist, und leitet aus ihr eine schon von J. Schur [Math. Ann. 74, 447—458 (1913)] und E. Landau (a. a. O.) angegebene $C \rightarrow H$ -Transformation ab. Insbesondere dient jedoch M_k zu einem Vergleich der Schwankungsintervalle der H_k -Mittel mit denen der C -Mittel gleicher und höherer Ordnung, sofern $\Omega(H_k)$ endlich ist. Ein Sonderfall des in dieser Richtung erzielten Ergebnisses ist die folgende Abschätzung:

$$k! \Omega(H_k) - (k! - 1) \Omega(C_{k+1}) \leq \Omega(C_k) \leq k! \Omega(H_k) + (k! - 1) \Omega(C_{k+1}),$$

die gilt, wenn h_k und H_k endlich sind, und die eine Verallgemeinerung eines (sich ursprünglich auf gewöhnliche Mittel beziehenden) Satzes von Dobrowolski (Bull. int. Acad. Polon. Sci., sér. A. 1925, 259—264) darstellt, welcher aussagt: Es ist $\Omega(C_k) = k! \Omega(H_k)$, sofern $\Omega(C_{k+1}) = 0$ ist. — Weiter gibt Verf. die zu M_k inverse

Transformation \mathfrak{M}_k an, welche die Hölderschen in die Rieszschen Mittel überführt. Eine solche $H \rightarrow C$ -Transformation wurde bisher nur für gewöhnliche Mittel aufgestellt [vgl. J. Schur, S.-B. Berlin. math. Ges. **29** (1930)]. Mit dem Nachweis der Permanenzeigenschaft von \mathfrak{M}_k ist nun auch die andere Hälfte des Äquivalenzsatzes erneut bewiesen. Vor allem wird jedoch \mathfrak{M}_k dazu benützt, die folgenden, ohne zusätzliche Bedingung über die der Limitierung unterworfenen Funktion $s(t)$ geltenden Ungleichungen aufzustellen:

$$k! [(1 + \delta_k) h_k - \beta_k H_k] \leq c_k \leq C_k \leq k! [(1 + \delta_k) H_k - \beta_k h_k],$$

$$(*) \quad \Omega(C_k) \leq k! (1 + \gamma_k) \Omega(H_k).$$

β_k , δ_k und $\gamma_k = \beta_k + \delta_k$ hängen nur von k ab und werden genau angegeben. Die in (*) auftretende Konstante $k! (1 + \gamma_k)$ kann durch keine bessere ersetzt werden. Für gewöhnliche Mittelbildungen hat C. E. Winn [C. R. Paris **194**, 2273—2275 (1932); dies. Zbl. **4**, 391] die Abschätzung $\Omega(C_k) \leq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1) \Omega(H_k)$ angegeben. Demgegenüber ist (*) im allgemeinen besser. Meyer-König (Stuttgart).

Meyer-König, Werner: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II. Math. Z. **45**, 479—494 (1939).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Math. Z. **45**, 447—478 (1939); dies. Zbl. **21**, 219—220] die Frage untersucht, inwieweit das Auftreten von Lücken bei einer Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die Konvergenz derselben nach sich zieht, falls die Reihe nach einem Cesàroschen

oder Hölderschen Verfahren summierbar ist. Dabei wird von dem Auftreten von „Lücken“ schon dann gesprochen, wenn die Reihe eine Folge von Teilstücken aufweist, deren Glieder einer Einschränkung ihrer Größenordnung unterworfen sind, jedoch keineswegs zu verschwinden brauchen. Die vorliegende Arbeit bringt die entsprechende Untersuchung für das Euler-Knoppsche Verfahren 1. Ordnung (E -Verfahren). — (1) Entsprechend der Gültigkeit des $O-E \rightarrow K$ -Satzes mit der Konvergenzbedingung

$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ geht Verf. in erster Linie darauf aus, Lückenumkehrsätze für Lücken-

intervalle der Länge $\vartheta \sqrt[n]{n}$ zu gewinnen. Ob ein Lückensatz mit dieser Länge der Lückenintervalle ohne Zusatzvoraussetzungen gilt, was den Verhältnissen bei den C - und H -Verfahren entsprechen würde, konnte bisher nicht entschieden werden. Dagegen lassen sich Lückensätze dieser Art unter zusätzlichen Voraussetzungen über die sämtlichen Reihenglieder angeben. Als schärfstes Resultat des Verf. in dieser Richtung sei genannt: Für die Indexfolge n_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) sei $n_{\nu+1} - n_\nu > \vartheta \sqrt[n_\nu]{n_\nu}$ mit einem

$\vartheta > 0$. Erfüllen dann die Reihenglieder a_n die Lückenbedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ für $n \neq n_\nu$, sowie die Zusatzbedingung $a_n = O(n^\alpha)$ für $n = n_\nu$ (α beliebig reell), so folgt

aus $E\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. — (2) Solange nicht feststeht, ob $\vartheta \sqrt[n]{n}$ wirklich

das für das E -Verfahren maßgebliche Lückenintervall ist, hat es Interesse, auch die Verhältnisse bei Lücken anderer Größenordnung zu untersuchen. Einen Lückensatz mit Lücken der Länge ϑn hat Y. Okada [Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 536—540 (1937); dies. Zbl. **17**, 254] angegeben. Verf. beweist einige verwandte Sätze, wobei in den

Lücken von der Länge ϑn nichtverschwindende Glieder der Größenordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ zu-

gelassen werden. Die Anwendung dieser Sätze auf Potenzreihen liefert in Verbindung mit der bekannten Tatsache, daß eine Potenzreihe in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes der Konvergenzgrenze E -summierbar ist [vgl. K. Knopp, Math. Z. **15**, 226—253 (1922)], unmittelbar einige Aussagen über das Verhalten der Potenzreihen am Rande des Konvergenzkreises. F. Lösch (Rostock).

Agnew, Ralph Palmer: On Tauberian theorems for double series. Amer. J. Math. 62, 666—672 (1940).

Es sei $\sum a_{\mu\nu}$ eine unendliche Doppelreihe mit den arithmetischen Mitteln $\sigma_{\mu\nu} = (\mu\nu)^{-1} \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{n=1}^{\nu} s_{mn}$ ihrer Teilsummen $s_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{n=1}^{\nu} a_{mn}$. Aus $\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \sigma_{\mu\nu} = s$ folgt $\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} s_{\mu\nu} = s$, wenn die Umkehrbedingung $(\mu^2 + \nu^2) a_{\mu\nu} < M$ erfüllt ist [vgl. K. Knopp, Math. Z. 45, 573—589 (1939), insbes. 581; dies. Zbl. 23, 28]. Die Frage liegt nahe, ob nicht (in Analogie zu den Verhältnissen bei einfachen Reihen) die schwächere Bedingung $\mu\nu a_{\mu\nu} < M$ auch schon eine ausreichende Umkehrbedingung ist. Verf. zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Sogar das gleichzeitige Erfülltsein der 3 Bedingungen (*) $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu\nu |a_{\mu\nu}| = 0$ (für festes $\mu = 1, 2, \dots$), $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu\nu |a_{\mu\nu}| = 0$ (für festes $\nu = 1, 2, \dots$), $\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \mu\nu |a_{\mu\nu}| = 0$ reicht nicht aus, um allgemein von $\sigma_{\mu\nu} \rightarrow s$ auf $s_{\mu\nu} \rightarrow s$ zu schließen, ja selbst dann nicht, wenn man noch die Existenz der Limites $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{\mu\nu}$ (für festes $\mu = 1, 2, \dots$) und $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sigma_{\mu\nu}$ (für festes $\nu = 1, 2, \dots$) voraussetzt und die erstrebte Behauptung $s_{\mu\nu} \rightarrow s$ auf die geringere Aussage $\lim_{\mu \rightarrow \infty} (\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_{\mu\nu}) = s$ reduziert. Verf. zeigt ferner, daß die 3 Bedingungen (*) keine ausreichende Umkehrbedingung darstellen bei gewissen allgemeinen Klassen von Limitierungsverfahren, welche die *C*-Verfahren beliebiger positiver Ordnung und das *A*-Verfahren enthalten. [Vgl. zu dem Gegenstand auch die Note des Ref., Math. Z. 46, 157—160 (1940); dies. Zbl. 23, 311—312.] Meyer-König.

Ghizzetti, Aldo: Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 215—223 (1940).

Es sei $f(t)$ eine beschränkte in $(0, 2\pi)$ integrierbare Funktion, und a_0, a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots$, (*) seien deren Euler-Fouriersche Koeffizienten. Man kann $0 \leq f(t) \leq 1$ annehmen. Verf. beweist die Existenz beachtenswerter Ungleichungen in bezug auf die Koeffizienten (*), die den größt- oder kleinstmöglichen Wert für einen Koeffizienten a_n oder b_n als Funktion der vorhergehenden bestimmen. Für $n = 1$ oder $n = 2$ z. B. erhält man

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \frac{2}{\pi} \sin \pi a_0 \quad (**) \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \leq \frac{2}{\pi} \sin \pi a_0 - \frac{\pi}{2} (a_1^2 + b_1^2) \tan \frac{\pi a_0}{2},$$

in denen die Gleichheitszeichen für besondere, vom Verf. bezeichnete Funktionen gelten. (**) ist ein Sonderfall der folgenden Ungleichung

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \frac{2}{\pi} \sin \pi a_0. \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Weitere Ungleichungen für $n > 2$ werden in einer folgenden Arbeit aufgestellt werden.

L. Cesari. (Pisa).

Szász, Otto: On strong summability of Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 117—125 (1940).

Es sei $f(t)$ eine mit 2π periodische Funktion der Klasse L und

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu t + b_{\nu} \sin \nu t) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}(t)$$

ihre Fourierreihe. Ferner sei $\Phi(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}$. — (1) Nach Hardy-Littlewood [C. R. Acad. Sci., Paris 156, 1307—1309 (1913)] ist die Fourierreihe von $f(t)$ an einer Stelle x stark summierbar zur Summe s in dem Sinne, daß

für ihre Teilsummen s_{ν} die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_{\nu} - s|^2 = 0$ besteht, falls $f(t)$ in einer Umgebung von x quadratisch integrierbar ist und überdies $\int_0^t \{\Phi(x, u)\}^2 du = o(t)$

gilt. L. Fejér gab kürzlich (vgl. dies. Zbl. 19, 340) unter der spezielleren Voraussetzung, daß $\Phi(x, t) \rightarrow 0$ für $t \downarrow 0$ gilt, zwei neue Beweise für die starke Summierbarkeit der

Fourierreihe von $j(t)$. Verf. zeigt in der vorliegenden Note, daß sich diese Beweise vereinfachen lassen, indem man an Stelle der Teilsummen s_n die Größen $s_n - \frac{1}{2}A_n$ betrachtet, und baut sie sodann aus zu Beweisen des Hardy-Littlewoodschen Satzes. — (2) Daran anschließend wird noch ein neuer, die Methoden der komplexen Funktionen-theorie vermeidender Beweis des folgenden Satzes von Hardy-Littlewood (vgl. dies.

Zbl. 12, 296) gegeben: Aus $\int_0^t |\Phi(x, u)| du = o(t)$ für $t \downarrow 0$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} [s_n(x) - s]^2 = o(n \log n)$ für $n \rightarrow \infty$. F. Lösch (Rostock).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. 11. Inequality theorem in the strong summability. Tôhoku Math. J. 47, 14—17 (1940).

Bezeichne $s_n(x)$ die n -te Partialsumme, $\sigma_n(x)$ das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ist $f(x) \in L^p (p > 1)$, so gilt bekanntlich für $\alpha > 0$ fast überall $\sum_{k=0}^n |s_k(x) - \sigma_k(x)|^\alpha = o(n)$.

Es wird gezeigt, daß die Funktionen $\sum_{k=0}^n |s_k(x) - \sigma_k(x)|^\alpha$ für $f(x) \in L$ im allgemeinen keine integrierbare Majorante haben. Dies folgt unmittelbar aus den beiden folgenden, von den Verff. für Kosinusreihen bewiesenen Abschätzungen:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|s_k(x) - \sigma_k(x)|}{k} dx \geq \text{Konst.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k},$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|s_k(x) - \sigma_k(x)|}{k} dx \geq \text{Konst.} \frac{\log n}{n} \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x} dx.$$

G. Alexits (Budapest).

Spezielle Funktionen:

Toseano, Letterio: Relazioni tra i polinomi di Laguerre e di Hermite. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 460—466 (1940).

Verf. beweist, daß zwei Formeln von Kogbetliantz über den Ausdruck von $L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ als Summe der Polynome $H_{2k}(x)$ und von $L_n^{(\alpha)}(x)$ als Summe von $L_k^{(\beta)}(x)$, $\alpha > \beta$, aus dem Uspenskyschen Integralausdruck von $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch $H_{2k}(x)$ bzw. von $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch $L_n^{(\beta)}(x)$ gewonnen werden können. Dabei wird die Formel

$$H_n(x) = (-1)^n n! \lim_{a \rightarrow 0} \left[a^n L_n^{\left(\frac{1}{a^2} + k\right)} \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right]$$

bewiesen, die für den besonderen Fall $k = -1$ früher von G. Palamà bewiesen worden war (vgl. dies. Zbl. 20, 222). Giovanni Sansone (Firenze).

Feldheim, E.: Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre. Comment. math. helv. 13, 6—10 (1940).

Nach Erdélyi gilt für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^n (\lambda - 1)^{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Es wird gezeigt, daß unter allen Orthogonalpolynomen $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

die Laguerreschen Polynome im wesentlichen die einzigen sind, die ein Multiplikationstheorem der Gestalt

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^n A_{nk} (\lambda - 1)^{n-k} \Phi_k(x)$$

besitzen.

Schoblik (Brünn).

- Sastry, B. S.: Note on a type of generalised Laguerre polynomial. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 10, 176—180 (1939).
 Varma, R. S.: On the polynomial $\pi_n(x)$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 11, 21—22 (1940).

A. Angelescu a envisagé les polynomes (ce Zbl. 18, 356, avec une légère modification)

$$\Pi_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} A_n(x)],$$

où A_n est de degré n et $A'_n = n A_{n-1}$ et dont les polynomes de Laguerre

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

sont un cas particulier. B. S. Sastry retrouve la fonction génératrice des polynomes $\Pi_n(x)$, établit la formule $\Pi'_n = n(\Pi'_{n-1} - \Pi_{n-1})$ et démontre les relations réciproques

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 A_i,$$

$$A_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 \Pi_i.$$

R. S. Varma établit la formule d'addition

$$\Pi_n(x+y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Pi_i(x) L_{n-i}(y) - \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \binom{n}{i} \Pi_i(x) L_{n-i-1}(y).$$

T. Popoviciu (București).

Feldheim, Ervin: Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynomes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 225—252 (1940).

Verf. schöpft aus einer von ihm früher gefundenen Formel \mathfrak{F} (dies. Zbl. 23, 31, Zeile 23f.) eine neue, in der die Hermiteschen Polynome der Ebene auftreten,

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) H_m\left(\frac{t+\xi}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{t+\eta}{\mu}\right) dt = \lambda^{-m} \mu^{-n} H_{mn}(x, y);$$

diese entspringen mit $\xi = (\lambda^2 - 1)x - y$, $\eta = -x + (\mu^2 - 1)y$ der Entwicklung

$$\exp\{2h\xi + 2k\eta - [(\lambda^2 - 1)h^2 - 2hk + (\mu^2 - 1)k^2]\} = \sum_{m,n} \frac{h^m}{m!} \frac{k^n}{n!} H_{mn}(x, y).$$

Verf. verallgemeinert (1) auf Hermitesche Polynome von N Veränderlichen und kehrt die so entstehende Beziehung um. — Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit den Gegenbauerschen Polynomen $V_n^{(s)}(x)$, aus denen die $H_n(x)$ ja durch einen Grenzübergang entstehen; das Seitenstück zu \mathfrak{F} in den $V_n^{(s)}$ ist aber schon erheblich verwickelter als \mathfrak{F} , so daß Verf. sich nicht darauf einläßt, (1) auf die $V_n^{(s)}$ zu übertragen. — Der dritte Teil betrifft die hypergeometrischen Funktionen (h. F.) und Laguerreschen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$. Verf. gewinnt für Lauricellas h. F. F_A unter der Annahme $\Re \alpha > \Re \gamma > 0$ die Integralgleichung

$$(2_A) \quad \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma-1} F_A(\alpha; \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; x x_1, \dots, x x_n) dx \\ = [\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha-\gamma)] / \Gamma(\alpha) F_A(\gamma; \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; x_1, \dots, x_n)$$

und eine entsprechende (2_D) für F_D . Sie verallgemeinern die für $n=1$ von Erdélyi angegebenen Formeln (dies. Zbl. 17, 163). — Durch Grenzübergang folgt Verf. die den Beziehungen (2_A), (2_D) entsprechenden für Humberts konfluente h. F. — Wenn man in (2_A) $n=2$, $\alpha = \varepsilon^{-1}$ setzt und x durch εx ersetzt, so findet man mit $\varepsilon \rightarrow 0$, falls $\Re \gamma > 0$,

$$(3) \quad \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} G(\beta_1, \gamma_1, xy) G(\beta_2, \gamma_2, xz) dx = \Gamma(\gamma) F_2(\gamma; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; y, z):$$

sind die β negative ganze Zahlen, so gehen die Kummerschen Funktionen G in Laguerresche Polynome über. — Ähnlich wie (3) ergeben sich Integralformeln, bei denen der wesentliche Teil des Integranden das Produkt einer Besselschen und einer G -Funktion ist. — Für $n = 3$ kommt man zu Werten von Integralen wie

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy}) G(\gamma, \alpha+1, x) G(\delta, \beta+1, x) dx.$$

Koschmieder (Graz).

Pevnyi, B. G.: On the asymptotic expansion of Whittaker's functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 308—309 (1940).

Verf. befaßt sich mit der asymptotischen Entwicklung:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s! \Gamma(\alpha-s) (-z)^s},$$

wo $M_{k,m}$ die Whittakersche Funktion bedeutet, und insbesondere mit der Restformel:

$$R_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s! \Gamma(\alpha-s) (-z)^s}.$$

Die Gleichung $R_n(z) = 0$ besitzt eine Wurzel, für die Verf. eine asymptotische Formel angibt. Weiter gibt Verf. für die Größe R_n eine Integraldarstellung an und leitet auch aus dieser Integraldarstellung eine asymptotische Formel für die Nullstelle von R_n ab.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Pevnyi, B. G.: Some functional equations for generalized hypergeometric series and Whittaker's functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 310—312 (1940).

Verf. geht von einer Integralgleichung aus, die Koshliakov für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome angegeben hat und stellt sich zum Ziel, eine analoge Gleichung für verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen und Whittakersche Funktionen abzuleiten. Er geht dabei von einer Identität aus, in der eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion als Integral in der komplexen Ebene dargestellt wird, wobei der Integrand wieder eine solche Funktion als Faktor enthält. Durch Umformung dieser Identität gelangt er zur obengenannten Integralgleichung für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome. Als weiteren Sonderfall betrachtet er eine Integraldarstellung für die hypergeometrische Reihe, welche kürzlich von Erdélyi abgeleitet wurde. Durch Betrachtung besonderer Werte des Argumentes und der Indizes gelangt Verf. zu einer Integraldarstellung einer Whittakerschen Funktion, wobei der Integrand eine andere Whittakersche Funktion als Faktor enthält.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Humbert, Pierre: Sur une formule de M. Nielsen. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I 60, 61—63 (1940).

Niels Nielsen hat in seiner „Theorie des Integrallogarithmus“, Leipzig 1906, S. 33 für die beiden Transzendenten

$$C(x) = \int_x^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad S(x) = \int_x^{\infty} \sin(x^2) dx$$

eine falsche Formel angegeben, nach der $C^2(x) + S^2(x)$ eine Funktion von x^2 allein sein müßte, was durch die Reihenentwicklungen widerlegt wird. Man erhält hingegen die richtige Formel durch Zurückführung auf die Krampsche Transzendente und Anwendung der Laplaceabbildung:

$$C^2(x) + S^2(x) = \int_0^{\infty} e^{-2xu} \frac{\sin(u^2)}{u} du.$$

Harald Geppert (Berlin).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Jelchin, M.: Sur une méthode d'évaluation de la phase d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Matematika. Učenyje Zapiski Moskov gosud. Univ. 45, 97—107 u. franz. Zusammenfassung 107—108 (1940) [Russisch].

Die Differentialgleichung $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ kann bekanntlich mittels der Substitution $y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{T_0}^t p(x) dx\right)$ auf die Form $\ddot{z} = I(t)z$ gebracht werden; die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung ist $z = (R/\sqrt{\omega(t)}) \cos\left(\int_{T_0}^t \omega(x) dx + \gamma\right)$, wobei R, γ beliebige Konstante und $\omega(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $-\frac{1}{2}(\omega'/\omega)' + \frac{1}{4}(\omega'/\omega)^2 - \omega^2 = I(t)$ bedeuten. Der Ausdruck $\int_{T_0}^t \omega(x) dx + \gamma$ wird als die Phase der Lösung bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit beschreibt der Verf. eine Methode zur approximativen Berechnung der Phase, die im wesentlichen darin besteht, daß das Intervall (T_0, t) in Teilintervalle zerlegt und die Phase unter Annahme eines konstanten Wertes der Funktion $I(t)$ in jedem der Teilintervalle berechnet wird.

O. Borůvka (Brünn).

Franzoni, Triestina: Sull'integrazione approssimata di una particolare equazione differenziale. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 32—36 (1940).

Verf. behandelt die angenäherte Integration der Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y = 0,$$

in der λ eine reelle stetige positive Funktion von x sei. Die schon von D. Graffi (dies. Zbl. 20, 82) verwendete Transformation

$$y = \sqrt{\frac{I\lambda}{\pi}} \sin \vartheta, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4\pi I}{\lambda}} \cos \vartheta$$

führt (1) in das System

$$\frac{dI}{dx} = I \frac{d \log \lambda}{dx} \cos 2\vartheta, \quad (2) \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{d \log \lambda}{dx} \sin 2\vartheta$$

über. Bezeichnet man mit $\vartheta_0 = \vartheta(0)$ den Anfangswert von ϑ und ersetzt man in der rechten Seite von (2) $\sin 2\vartheta$ durch den Näherungswert $\sin 2\vartheta_0 + 2(\vartheta_1 - \vartheta_0) \cos 2\vartheta_0$, so bestimmt Verf. ϑ_1 aus der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = -\left[\frac{d \log \lambda}{dx} \cos 2\vartheta_0\right] \vartheta_1 - \frac{1}{2} \frac{d \log \lambda}{dx} [\sin 2\vartheta_0 - 2\vartheta_0 \cos 2\vartheta_0] + \frac{2\pi}{\lambda},$$

und zeigt, daß zu vorgelegtem $\varepsilon > 0$ im Intervall $(0, \nu)$ die Ungleichung $|\vartheta - \vartheta_1| < \varepsilon$ erfüllt ist, wobei ν eine positive Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$\varepsilon > \varepsilon \int_0^\nu \left| \frac{d \log \lambda}{dx} \right| dx + \int_0^\nu \left| \frac{d \log \lambda}{dx} \right| (\vartheta_1 - \vartheta_0)^2 dx$$

genügt.

Giovanni Sansone (Firenze).

Butlewski, Zygmunt: Sur les intégrales oscillantes et bornées d'une équation différentielle du second ordre. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 187—200 (1940).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung

$$(*) \quad \frac{d}{dt} \left[\theta(t) \frac{dx}{dt} \right] + f(t, x) = 0,$$

in der $\theta(t) > 0$ eine stetige, für jedes $t \geq t_0$ differenzierbare Funktion und $f(t, x)$ eine für jedes $t \geq t_0$ und jedes x stetige Funktion ist. Ein für alle $t \geq t_0$ existierendes Integral $x(t)$ von (*) wird oszillierend genannt, wenn $x(t)$ unendlich viele Nullstellen $[t_n]$ besitzt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$. Verf. beweist u. a. folgendes: I) Wenn a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) > 0$ (endl. oder unendl.); b) $f(t, x) > 0$ für alle $x > 0$, $f(t, x) < 0$ für alle $x < 0$; c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f[t, x(t)] = G > 0$ (G endl. oder unendl.) für jede stetige Funktion $x(t)$, für die

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = g > 0$ (g endl. oder unendl.) ist, dann ist jedes Integral $x(t)$ von (*), das für alle $t \geq t_0$ existiert, oszillierend. Außerdem gibt es in jedem Intervall (t_n, t_{n+1}) ein einziges τ_n , $t_n < \tau_n < t_{n+1}$, in dem $x'(\tau_n) = 0$. Es sei $x_n = x(\tau_n)$, $n = 1, 2, \dots$ II) Wenn b), c) gilt und d) $f(t, x)$ eine in bezug auf t für jedes x und für jedes $t \geq t_0$ differenzierbare Funktion ist; e) $f(t, x) = -f(t, -x)$; f) $\partial \theta(t) f(t, x) / \partial t < 0$ für alle $x > 0$, $t \geq t_0$ ist, dann ist die Folge $[x_n]$ für jedes oszillierende Integral $x(t)$ von (*) wachsend. II') Gilt b), c), d), e) und f') $\partial \theta(t) f(t, x) / \partial t > 0$ für jedes $x > 0$, $t \geq t_0$, dann ist die Folge $[x_n]$ abnehmend, und $x(t)$ ist deshalb beschränkt. *L. Cesari.*

Cesari, Lamberto: Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 163—186 (1940).

Gegeben ist die Differentialgleichung (1) $y'' + \varphi(x)y = 0$ und vorausgesetzt wird $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a > 0$; dann sind die Integrale der Gleichung (1) im Gebiet $(x_0, +\infty)$ sämtlich beschränkt, falls eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist: 1) $|\varphi(x) - a|$ ist im Gebiet $(x_0, +\infty)$ absolut integrierbar [vgl. M. Fukuhara-M. Nagumo, Proc. Imp. Acad. Tokyo 6, 131—132 (1930)], oder 2) $|\varphi(x) - a|$ ist im Gebiet $(x_0, +\infty)$ von beschränkter Schwankung [vgl. A. Wiman, dies. Zbl. 14, 19 und auch R. Caccioppoli, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6) 11, 251—254 (1930)]. Auf Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung wurde das Kriterium 1) von M. Hukuhara (dies. Zbl. 9, 16) und L. Cesari (dies. Zbl. 21, 126; 22, 338) erweitert. In vorliegender Arbeit erweitert Verf. das Kriterium 2) auf homogene und nichthomogene lineare Differentialgleichungen und Systeme solcher in Normalform und zeigt an einem Beispiel, daß seine Ergebnisse sich nicht verbessern lassen. — Für den homogenen Fall beweist er

folgendes: Sind in dem Differentialsystem (2) $y'_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^n [a_{\lambda,\mu} + f_{\lambda,\mu}(x) + \varphi_{\lambda,\mu}(x)] y_\mu(x)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) die Funktionen $f_{\lambda,\mu}(x)$ im Gebiet $(x_0, +\infty)$ von beschränkter Schwankung, gilt ferner $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\lambda,\mu}(x) = 0$, sind weiter die Funktionen $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ im Gebiet $(x_0, +\infty)$ absolut integrierbar, und haben die Wurzeln ϱ der Gleichung $|a_{\lambda,\mu} - \delta_{\lambda,\mu} \varrho| = 0$ ($\delta_{\lambda,\mu} = 1$ für $\lambda = \mu$, $\delta_{\lambda,\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$) sämtlich nichtpositive Realteile, wobei diejenigen mit verschwindendem Realteil einfach sind, und haben ferner die Wurzeln der Gleichung $|a_{\lambda,\mu} + f_{\lambda,\mu}(x) - \delta_{\lambda,\mu} \varrho(x)| = 0$ im Gebiete $(x_0, +\infty)$ nichtpositive Realteile, so sind sämtliche Integrale des Systems (2) beschränkt. *G. Sansone (Firenze).*

Mambriani, A.: La derivazione d'ordine qualunque e la risoluzione dell'equazione ipergeometrica. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 9—18 (1940).

Die Ableitung der Ordnung ω ($\operatorname{Re} \omega < 0$) werde durch

$$D_{x_0}^\omega f(x) = \frac{1}{(-\omega - 1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x - t)^{-\omega - 1} dt$$

definiert. Verf. beweist, daß die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' - \{(\alpha + \beta + 1)x - \gamma\}y' - \alpha\beta y = 0$$

spezielle Zweige der Ausdrücke

$$(1) D^{\alpha-1} \{x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1}\}, \quad (2) D^{\alpha-1} \{x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} \int x^{\gamma-\alpha-1} (1-x)^{\beta-\gamma} D^{-\alpha} 0 dx\}$$

und von Linearkombinationen derselben mit konstanten Koeffizienten sind. Aus (1) leitet man auf elegante Weise die klassischen Integrale von Euler und Jacobi her. Weitere Ergebnisse gewinnt Verf. aus (2), indem er für $D^{-\alpha} 0 = B^{-\alpha+1}$ den speziellen

Zweig $\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$ wählt.

Giovanni Sansone (Firenze).

Moore, M. G.: Fundamental systems of solutions for linear difference equations. Duke math. J. 6, 652—657 (1940).

This paper studies the generalized difference equation

$$(1) \sum_{\mu=1}^N c_\mu f(x + \alpha_\mu) = 0$$

with constant coefficients c_μ and with complex spans α_μ . There are particular solutions of (1) which are of the form $x^q \exp(t_m x)$ ($q = 0, 1, 2, \dots, w(\bar{m}) - 1$) associated with the zero t_m of the function $h(t) = \sum_{\mu=1}^N c_\mu \exp(\alpha_\mu t)$, the order of t_m being $w(m)$. The

author investigates the problem how extensive a class of solutions can be obtained by taking linear combinations of these particular solutions and the limits of converging sequences of such linear combinations. For this purpose the author introduces a sequence of contour-integrals which defines a formal expansion of an arbitrary function into the series of the fundamental solutions of (1), and gives the convergence-theorems of this series, which is called *F*-series in this paper, for various classes of functions. Finally this paper gives us the following fundamental theorems: (I) Let $f(x)$ be analytic throughout an open region U containing the polygon P (the smallest closed convex polygon containing $\alpha_1, \dots, \alpha_N$) and let (1) be satisfied for x in a neighborhood of the origin. Let \bar{P} be the smallest closed convex polygon containing a set of β_μ which are so defined that $\beta_\mu - \alpha_\mu + \alpha_\nu$ is a point of \bar{P} ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, N$). Then if \bar{P} contains P and is contained in U , the *F*-series converges uniformly to $f(x)$ in \bar{P} . (II) Let $f(x)$ be an integral function which satisfies (1). Then its *F*-series converges to $f(x)$ throughout the finite plane, the convergence being uniform in any closed region. The reviewer thinks it not unnecessary to remark that, as the author of this paper points out, the *F*-series for the real problem is a special case of the reviewer's Cauchy series which is defined for a more general functional equation and that it will be of some interest to investigate how the results and the methods adopted in Cauchy series can be extended for the case of the complex problem, in view of the present paper.

T. Kitagawa (Hukuoka).

Shin, D.: On solutions of the system of quasi-differential equations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 391—395 (1940).

Es seien P, Q, R, A quadratische Matrizen n -ter Ordnung, deren Elemente komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen x sind; insbesondere mögen die Elemente λ_{ik} der Matrix A von einem komplexen Parameter λ rational abhängen: $\lambda_{ik} = (a_{ik}\lambda + b_{ik}) : (c_{ik}\lambda + d_{ik})$. Es handelt sich um Untersuchungen betreffend Lösungen F der Differentialgleichung (1) $F^{[1]} - AF = F^*$, wobei F^* einen von x abhängenden Vektor mit n Komponenten bedeutet und $F^{[1]}$ mittels des Vektors $F^{[0]} = PF$ in folgender Weise definiert ist: $F^{[1]} = iQ(dF^{[0]}/dx) + RF^{[0]}$. Ein Vektor F wird als eine Lösung von (1) bezeichnet, wenn die Komponenten von $F^{[0]}$ absolut stetig sind und $F^{[1]} - AF$ fast überall mit F^* übereinstimmt. Unter gewissen Bedingungen betreffend die P, Q, R, A, F^* gilt über die Lösungen F der Differentialgleichung (1) ein dem klassischen skalaren Falle ähnlicher Existenzsatz, und die homogene Differentialgleichung $F^{[1]} - AF = 0$ besitzt n unabhängige Lösungen. Die Lösungen werden hinsichtlich der Eigenschaft L_2 im Zusammenhang mit den Werten des Parameters λ weiter beschrieben (vgl. D. Schin, dies. Zbl. 23, 317).

O. Borůvka (Brünn).

Halpern, S.: Quelques remarques sur les systèmes aux différentielles totales. Matematika. Učenyje Zapiski Moskov gosud. Univ. 45, 93—96 u. franz. Zusammenfassung 96 (1940) [Russisch].

Im System

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} L_i\{w\} &\equiv \frac{\partial w_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^p a_{ij}(t, u) w_j = F_i(t, u) \\ M_i\{w\} &\equiv \frac{\partial w_i}{\partial u} - \sum_{j=1}^p b_{ij}(t, u) w_j = \Phi_i(t, u) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, p$$

seien die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij} und die rechten Seiten F_i, Φ_i stetige Funktionen von t, u

in einem bestimmten Bereiche. Unter den Verträglichkeitsbedingungen

$$\|a_{ij}\| = A, \quad \|b_{ij}\| = B; \quad AB - BA = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$L_i\{\Phi\} - M_i\{F\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

hat das System (1) die Lösung

$$(2) \quad w_i = \int_{(t_0, u_0)}^{(t, u)} \sum_{j=1}^p \{F_j(t_0, u_0) w_i^j(t, u, t_0, u_0) dt_0 + \Phi_j(t_0, u_0) w_i^j(t, u, t_0, u_0) du_0\},$$

wo w_i^j das Fundamentalsystem der Lösungen des homogenen Systems (1) bedeutet. Die Lösung (2) hat ähnliche Eigenschaften wie die Lösung des Systems der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Formel (2) ist der bekannten Formel von Cauchy ähnlich. Rádl (Prag).

Pfeiffer, G.: Sur la représentation spéciale d'une équation linéaire en Jacobiens aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues, satisfaisant aux conditions de M. Hamburger, et d'un système d'équations linéaires en Jacobiens, satisfaisant aux conditions de M. Hamburger généralisées. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 5, 17—29 u. franz. Zusammenfassung 30 (1940) [Ukrainisch].

Untersuchungen betreffend partielle Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \quad M + \sum_{\sigma, \tau}^{k, n} M_{\tau}^{\sigma} \frac{\partial z_{\sigma}}{\partial x_{\tau}} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \tau_1, \tau_2}}^{k, n} M_{\tau_1 \tau_2}^{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\partial(z_{\sigma_1}, z_{\sigma_2})}{\partial(x_{\tau_1}, x_{\tau_2})} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \tau_1, \tau_2, \tau_3}}^{k, n} M_{\tau_1 \tau_2 \tau_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \frac{\partial(z_{\sigma_1}, z_{\sigma_2}, z_{\sigma_3})}{\partial(x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3})} + \dots = 0,$$

wobei die Ableitungen der unbekannten Funktionen z_1, \dots, z_k nach den unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_n in Jacobischen Determinanten auftreten. Über die Koeffizienten wird vorausgesetzt, daß sie den Bedingungen von M. Hamburger genügen. Bekanntlich ist die Integration einer solchen Differentialgleichung der Integration des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten

Funktion äquivalent: (2) $M \partial f / \partial z_{\kappa} - \sum_{\nu=1}^n M_{\nu}^{\kappa} \partial f / \partial x_{\nu} = 0$ ($\kappa = 1, \dots, k$). In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß einer Verlängerung des Systems (2) durch Hinzufügen einer oder mehrerer Gleichungen von der Form

$$\partial f / \partial x_{n-\alpha} - a_{\alpha, 1} \partial f / \partial x_1 - \dots - a_{\alpha, n-\alpha-1} \partial f / \partial x_{n-\alpha-1} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots)$$

auf die Gleichung (1) untersucht, und es werden Gleichungen (1) aufgestellt, die den verlängerten Systemen (2) entsprechen. Diese Untersuchungen werden dann auf Systeme von Differentialgleichungen von der Form (1) erweitert. O. Borůvka.

Petrowsky, I.: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen. Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 7, 1—74 (1938).

Für das System der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{(k_j)} A_{ij}^{(k_j, k_1, \dots, k_N)}(t) \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \dots + k_N} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

($i = 1, \dots, N$; $t \in (0, T)$; x_i reell), wobei sich die innere Summe auf alle ganzen $k_s \geq 0$, deren Summe eine Zahl M nicht übertrifft und in der $k_0 < n_j$ (> 0) ist, bezieht, wird der Begriff der gleichmäßig korrekten Stellung des Cauchyschen Problems folgendermaßen erklärt: Für jedes $0 \leq t_0 < T$ und für jedes System von beschränkten Funktionen $\varphi_i^{(k)}(x_1, \dots, x_n)$ ($k = 0, \dots, n_i - 1$), deren partielle Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung L ebenfalls beschränkt sind, gibt es ein einziges System von Funktionen u_i , die 1. samt allen partiellen Ableitungen von genügend hoher Ordnung beschränkt sind, für $t_0 < t \leq T$ das System befriedigen und sich für $t = t_0$ mit ihren

Ableitungen nach t bis zur Ordnung $n_i - 1$ auf die $\varphi_i^{(k)}$ reduzieren; 2. diese Lösung u_i ändert sich mit den Funktionen $\varphi_i^{(k)}$ und ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung L stetig, und zwar gleichmäßig in bezug auf t_0 . Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $A_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t)$ und f_i beschränkte partielle Ableitungen von genügend hoher Ordnung besitzen, gibt der Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßig korrekte Stellung des Cauchyschen Problems an. In diesem Zusammenhang werden dann gewisse sog. parabolische und hyperbolische Systeme mit tiefliegenden Mitteln eingehend untersucht.

O. Borůvka (Brünn).

Karimov, Dsh. H.: Über die periodischen Lösungen der nichtlinearen differentialen Gleichungen des parabolischen Typus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 403—406 (1940).

Ein Existenzsatz betreffend die Lösungen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) $\partial[P(x)\partial z/\partial x]/\partial x - \partial z/\partial t = \Phi(x, t) + \mu f(z)$. Unter gewissen Bedingungen über die Funktionen $P(x)$, $\Phi(x, t)$, $f(z)$, von denen insbesondere die Periodizität in bezug auf t der Funktion $\Phi(x, t)$ und die Möglichkeit ihrer Entwicklung nach den Funktionen $X_n(x)$ eines orthogonalen und normalen Systems:

$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x)$ ($X_n(0) = X_n(\pi) = 0$) hervorzuheben ist, besitzt die Gleichung (1)

eine einzige, mit stetiger Ableitung erster (in bezug auf t) und zweiter (in bezug auf x) Ordnung versehene und in bezug auf t periodische Lösung, welche die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt: $z(0, t) = z(\pi, t) = 0$, $z(x, 0) = z(x, 1)$. Zum Beweise des Satzes wird die Lösung mittels sukzessiver Approximationen konstruiert. Das Resultat stellt eine Verallgemeinerung eines vom Verf. früher bewiesenen Satzes dar (vgl. dies. Zbl. 22, 226).

O. Borůvka (Brünn).

Drinfeld, G.: Sur les opérateurs permutant les invariants intégraux d'un groupe continu de transformations. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 5, 117—121 u. franz. Zusammenfassung 122 (1940) [Ukrainisch].

Es sei G_r eine r -parametrische kommutative Transformationsgruppe mit den linear unabhängigen infinitesimalen Operatoren $X_1(f), \dots, X_r(f)$. Ein infinitesimaler Operator $Z(f) = Z_i \partial / \partial x^i$ transformiert dann und nur dann die Integralinvarianten aller Ordnungen von G_r in der Weise, daß jede Integralinvariante $\int A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_p}$ in $\int B_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_p}$ übergeht, wobei

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = Z(A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) + \sum_i A_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \dots \alpha_p} (\partial Z_j / \partial x^{\alpha_i})$$

ist, wenn G_r eine in der durch die infinitesimalen Operatoren $X_1(f), \dots, X_r(f)$, $Z(f)$ erzeugten $(r+1)$ -parametrischen Gruppe invariante Untergruppe ist (für $r=1$ vgl. Drinfeld, dies. Zbl. 23, 320).

O. Borůvka (Brünn).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Malkin, I. F.: On the problem of the conduction of heat in cylindrical shafts and shells. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, Nr 2, 23—40 u. engl. Zusammenfassung 40 (1939) [Russisch].

Fortsetzung früherer Arbeiten des Verf. [Appl. Math. a. Mech., N. s. 2, Nr 3, 317 usw.; 331 usw.; N. s. 2, Nr 4, 487 usw. (1939)]. Es wurde eine Methode für die Ausrechnung der Verteilung der Temperaturen in Platten angegeben. Jetzt wird dieselbe Methode zur Untersuchung kreisförmiger Zylinder (auch hohler) angewendet.

Janczewski (Leningrad).

Wavre, Rolin: Sur l'intégrale de Cauchy étendue à une ligne ouverte. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) 57, 78—79 (1940).

Verf. sucht Fälle, wo das im Titel genannte Integral in einem Gebiete identisch verschwindet, und stellt Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, die in Zusammenhang mit diesem Problem stehen.

G. af Hällström (Åbo).

Wavre, Rolin: A propos d'un problème d'attraction et les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) 57, 113—115 (1940).

Es wird die Aufgabe gelöst, bei gegebenem Körper verschiedene Massendichten zu bestimmen, die im Außenraume eines Körpers D dasselbe Potential erzeugen und dieselben Trägheitsmomente besitzen. Dies ist im allgemeinen auf unendlich verschiedene Arten möglich und die (als stetig angenommenen) Funktionen, die im Außenraume von D das Potential Null erzeugen, sind orthogonal zu allen in D harmonischen Funktionen. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß sich jede in D stetige Funktion eindeutig als Summe einer in D harmonischen und einer stetigen Funktion darstellen läßt, die zu allen im Inneren von D harmonischen Funktionen von gleichmäßig beschränktem Quadratintegral über D orthogonal ist. G. Tarutz (Breslau).

Soudan, Robert: Sur la déformabilité d'un corps à potentiel constant. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) 57, 79—82 (1940).

Verf. beweist: Es läßt sich eine infinitesimale Deformation eines homogenen anziehenden Körpers bestimmen, deren Dicke proportional mit ε ist und derart, daß die Änderung ΔU des Newtonschen Potentials U des Körpers der Bedingung

$$\Delta U \leq \varepsilon^n A$$

genügt. Der Sinn verschiedener Formeln des Verf. wurde Ref. nicht klar.

Tarutz.

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Levi, Beppo: Über das System $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x).$

Publ. Inst. Math., Rosario 1, Nr 1, 8 S. (1939) [Spanisch].

Nennt man ein System, für das $p(y) \equiv 0$ und $q(x) \equiv 0$ ist, homogen, so wird zunächst bewiesen, daß sich die allgemeine Lösung des Problems in der für lineare Systeme bekannten Weise aus einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems aufbauen läßt. Ist eine beliebige Funktion $\varphi(x, y)$ so beschaffen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy \text{ existieren und } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy,$$

und eine beliebige Funktion $\lambda(\xi)$ an die Bedingung gebunden $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\xi) d\xi = 1$, so hat die allgemeine Lösung des homogenen Problems die Form:

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx - \lambda(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy + \lambda(x) \lambda(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy.$$

Erfüllen die Funktionen $p(y)$ und $q(x)$ die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) dx = M,$$

so ist $p(y)q(x)/M$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Für Polynome $p(y)$ und $q(x)$ ist jedoch die obige Bedingung nicht erfüllt. Für den Fall $p(y) \equiv y^n$ und $q(x) \equiv x^n$ wird jedoch eine partikuläre Lösung in der Gestalt

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha} y^{n-\alpha} \right) e^{-(x+y)^2}$$

ermittelt (die Koeffizienten a_{α} sind in geeigneter Weise zu bestimmen). Mittels dieser Lösung läßt sich die Lösung von $p(y) \equiv y^n$ und $q(x) \equiv 0$ ausdrücken und darauf schließlich die Lösung der Aufgabe für beliebige Polynome $p(y)$ und $q(x)$ zurückführen. F. Knoll (Wien).

Kawata, Tatsuo: A relation between the theories of Fourier series and Fourier transforms. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 255—261 (1940).

Verf. beweist die beiden folgenden Sätze, welche gewisse Analogien zwischen

Fourierreihen und Fouriertransformationen erklären: (1) Es sei $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ für ein $p > 1$ und besitze die Fouriertransformation $F(t)$ in $L_q(-\infty, +\infty)$ für ein $q \geq 1$. Ist dann $\varphi(t)$ diejenige mit $2R$ periodische Funktion, welche in $(-R, +R)$ mit $F(t)$

übereinstimmt und ist $\varphi(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{R}t}$ ihre Fourierreihe, so besteht die Beziehung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p \leq \frac{A_p}{R^{p-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx. \text{ Dabei ist } A_p \text{ eine nur von } p, \text{ nicht aber von } f(x) \text{ und } R$$

abhängige Konstante. (2) Es sei $\varphi(t) \in L(-R, +R)$ mit $2R$ periodisch, und es sei die aus ihren Fourierkoeffizienten c_n gebildete Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p$ ($p > 1$) konvergent. Definiert man dann $F(t)$ durch $F(t) = \varphi(t)$ in $(-R, +R)$ und $F(t) = 0$ in $|t| \geq R$, so gilt für

ihre (in L_∞ existierende) Fouriertransformation $f(x)$ die Beziehung $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx$

$$\leq B_p R^{p-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p. \text{ Dabei ist } B_p \text{ eine nur von } p, \text{ nicht aber von } \varphi(t) \text{ und } R \text{ abhängige}$$

Konstante. — Als Anwendung leitet Verf. noch mit Hilfe von (1) aus dem Satz von Hausdorff-Young über Fourierreihen den entsprechenden Satz von Titchmarsh über Fouriertransformationen her.

F. Lösch (Rostock).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Faedo, Sandro: Il principio di Zermelo per gli spazi astratti. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 263—276 (1940).

Im Raume S der Punkte P mit den reellen Koordinaten $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sei ein Modul $\Delta(P)$ definiert, der folgende Eigenschaften besitzt: 1. $\Delta(P) \geq 0$; 2. für den Anfangspunkt $P(0, 0, \dots)$ ist $\Delta(P) = 0$; 3. $\Delta(P)$ ist eine nichtabnehmende, stetige Funktion einer jeden Koordinate a_n ; 4. sind $\Delta(P_n)$ für die Punkte $P_n(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ beschränkt, so ist $\Delta(P)$ endlich; 5. ist $\Delta(P)$ endlich, so ist für die Punkte $P^n(0, \dots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(P^n) = 0$; 6. es gibt eine nur von M abhängende

Zahl K_M so, daß für den Abstand $\Delta(P, Q) = \Delta(P - Q)$ der Punkte P, Q , deren Modul $\Delta(P) \leq M, \Delta(Q) \leq M$ sind, die Ungleichung $\Delta(P, Q) \leq K_M[\Delta(P) + \Delta(Q)]$ erfüllt ist. Verf. betrachtet den Raum S_Δ jener Punkte P von S , für welche $\Delta(P)$ endlich ist. Er gibt eine gewisse Vorschrift an, welche einer jeden abgeschlossenen Menge in S_Δ einen bestimmten Punkt dieser Menge zuordnet. Das Zermelosche Auswahlaxiom ist also im Falle abgeschlossener Mengen eines S_Δ vermeidbar. Der Raum S_Δ umfaßt u. a. den Fréchet'schen, den Hilbert'schen und Pseudo-Hilbert'schen Raum als Spezialfälle.

G. Hajós (Budapest).

Fréchet, Maurice: Sur les espaces distanciés. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 265—267 (1940).

Bemerkungen zu dem Beweis von M. Kunugui [Proc. Imp. Acad. Tokyo 11, 351 bis 353 (1935); dies. Zbl. 14, 256], daß jeder metrische Raum zu einer Teilmenge eines vollständigen Banachraumes isometrisch ist.

G. Köthe (Gießen).

Gantmacher, Vera, und Vitold Šmulian: Über schwache Kompaktheit im Banach'schen Raum. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 489—491 u. deutsch. Zusammenfassung 492 (1940) [Russisch].

Ist K eine schwach kompakte Menge in einem Banachraum E , so gibt es zu jeder beschränkten Folge von Funktionalen $f_n, \|f_n\| \leq 1$, eine Teilfolge f_{n_i} und ein $f_0 \in \bar{E}$, $\|f_0\| < 1$, so daß $\lim f_{n_i}(x) = f_0(x)$ ist für jedes x aus K . (Nach dem Auszug referiert.)

G. Köthe (Gießen).

Sirvint, G.: Schwache Kompaktheit in den Banach'schen Räumen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 199—202 (1940).

Mitteilung einer Reihe von Sätzen ohne Beweise. Charakteristisch für den Inhalt sind die folgenden Sätze. — Es sei E ein separabler Raum vom Typus (B) . Damit

$G \subset E$ schwach kompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß für eine beliebige Folge $f_n(x)$ von linearen Operationen auf E , für die $f_n(x) \rightarrow 0$, diese Konvergenz quasi-gleichmäßig auf G stattfindet (d. h. man kann zu $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ endlich viele Indizes n_1, n_2, \dots, n_k derart finden, daß 1) $n_i > N$ für jedes i , 2) es zu jedem $x \in G$ wenigstens ein n_i gibt, so daß $|f_{n_i}(x)| < \varepsilon$). — Es wird gesagt, daß die Folge f_n von linearen Operationen auf E eigentlich schwach gegen 0 strebt, wenn $F(f_n) \rightarrow 0$ für jede lineare Operation F gilt, die in dem Raume E^* der linearen Operationen von E definiert ist. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß für jede Teilfolge f_{n_k} von f_n , $f_{n_k}(x)$ auf der Einheitskugel von E quasi-gleichmäßig gegen 0 strebt. — Es folgen Kriterien für die schwache Vollstetigkeit einer linearen Transformation, die einen Raum E in einen separablen Raum E_1 transformiert. Ist E_1 der Raum C der stetigen Funktionen auf dem Intervall (a, b) , so wird die allgemeine Form einer solchen Transformation angegeben.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Bohnenblust, F.: An axiomatic characterization of L_p -spaces. Duke math. J. 6, 627—640 (1940).

The fundamental theorem proved in this paper is as follows: Any partially ordered, separable, Banach space of at least three dimensions in which "property P " is valid is "strongly equivalent" to one of the following spaces: (a) $l_{p,n}$, $l_{p,\infty}$ ($1 \leq p < \infty$), whose elements are finite or infinite sequences $x = \{\xi_n\}$ with a finite norm $\|x\| = (\sum |\xi_n|^p)^{1/p}$, (b) L_p ($1 \leq p < \infty$), whose elements are Lebesgue measurable functions over the interval $(0, 1)$ with a finite norm $(\int |f(t)|^p dt)^{1/p}$, (c) any direct sum of (a) and (b) with the same number p , where the norm is given as the $l_{p,2}$ norm of the norms of the components, (d) $l_{\infty,n}$, whose elements are $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ with the norm $\max(|\xi_n|)$, (e) C_0 , whose elements are sequences converging to zero with the norm $\max(|\xi_n|)$. Herein the "property P " means that, if a and b are two elements of the linear space which can be split up as the sum of two mutually orthogonal elements: $a = a_1 + a_2$, $|a_1| \wedge |a_2| = 0$; $b = b_1 + b_2$, $|b_1| \wedge |b_2| = 0$, in such a way that $\|a_1\| = \|b_1\|$ and $\|a_2\| = \|b_2\|$, then the norms of the elements a and b must be equal. The notion of "strong equivalence" is defined as follows: Two Banach spaces are said to be equivalent if there exists a norm preserving one-to-one correspondence between their elements. If the spaces are partially ordered, and the correspondence can be so chosen to be also order preserving, they will be said to be strongly equivalent. The fundamental idea of this paper, it seems to the reviewer, lies in reducing the property P into the functional equation $f(\xi, f(\eta, \zeta)) = f(f(\xi, \eta), \zeta)$ for any $\xi, \eta, \zeta > 0$, by considering $f_{a,b}(\xi, \eta) = \xi \frac{a}{\|a\|} + \eta \frac{b}{\|b\|}$, where a and b are the elements of the space.

T. Kitagawa (Hukuoka).

Kakutani, Shizuo: On the uniform ergodic theorem concerning real linear operations. Jap. J. Math. 17, 5—12 (1940).

Let T be a linear operation on a real Banach space E to E . Introduce a complex Banach space $E^* = E + \sqrt{-1}E$ of points $z = x + \sqrt{-1}y$ ($x, y \in E$) with norm $\|z\| = \|x\| + \|y\|$ and scalar multiplication $\alpha z = \alpha x - b y + \sqrt{-1}(b x + \alpha y)$ ($\alpha = a + \sqrt{-1}b$, a, b real). Then by $T \cdot z = T \cdot x + \sqrt{-1}T \cdot y$ a real linear operation on E^* to E^* is defined. Let T satisfy i) $\|T^n\| \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$), ii) there exists an integer $m > 0$ and a completely continuous linear operation on E^* to E^* such that $\|T^m - V\| < 1$. Then it is proved that the proper values λ of T of modulus 1 are finite in number and satisfy the relation $\lambda^N = 1$ with common integer N . This is an elegant extension of a theorem due to M. Fréchet (this Zbl. 9, 264), generalised by the reviewer (this Zbl. 21, 422). The proof, which appeals to a theorem of the author and the reviewer (this Zbl. 19, 414, 416), is short and plain. The result plays an essential rôle in the operator-theoretical treatment of the Markoff process. A matrix analogue of the result is also obtained, which may be compared with the well-known theorem due to G. Frobenius: If the maximum modulus of all the proper values of

a matrix $P = (p_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots$) with non-negative elements be 1, then 1 is a proper value of P and all proper values of P of modulus 1 are roots of unity. *Kôzaku Yosida.*

Yosida, Kôzaku: An abstract treatment of the individual ergodic theorem. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **16**, 280—284 (1940).

Let S be a linear space of the type (F) , which is also semiordered in such a manner that the following conditions are satisfied: a) $\inf(x, y)$ and $\sup(x, y)$ are continuous in x and y in the topology defined by the norm $\|\dots\|$, b) $x \geq y \geq -x$ implies $\|x\| \geq \|y\|$, c) if we write $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in the case when $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} x_m$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} x_m$ both exist and coincide, then $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ implies $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. —

Let T_n be a sequence of continuous linear transformations of S in itself. Assume that $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ exists for all points x of a set of second category in S . If to a point $y \in S$ there corresponds a point $\bar{y} \in S$ such that $\|T_n y - \bar{y}\| \rightarrow 0$, $T_n \bar{y} = \bar{y}$ (for all n), $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n y - T_n T_m y) = 0$ (for all m), then $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y$. — The author calls this theorem an abstract form of the individual ergodic theorem. As a matter of fact, it gives a possibility to derive "individual" ergodicity (expressed by $\lim T_n y = \bar{y}$) from the "statistical" one (expressed by $\|T_n y - \bar{y}\| \rightarrow 0$). — It is shown how Wiener's m -parameter individual ergodic theorem may be derived from this theorem. — From the further applications we cite only the following one: Let T be a continuous linear transformation of L^p in itself ($p \geq 1$). Assume that to any $x(t) \in L^p$ there corresponds an $X(t) \in L^p$ such that $|T^n x(t)| \leq X(t)$ almost everywhere ($n = 1, 2, 3, \dots$). Then it is possible to associate to any $x \in L^p$ an $\bar{x} \in L^p$ such that for $n \rightarrow \infty$:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n T^m x - \bar{x} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad (\text{almost every-where}) \quad \frac{1}{n} \sum_1^n T^m x(t) \rightarrow \bar{x}(t).$$

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Šilov, G.: Sur la théorie des idéaux dans les anneaux normés de fonctions. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **27**, 900—903 (1940).

Für gewisse normierte Ringe aus Funktionen $x(t)$, die auf einer Menge S erklärt sind, werden die Ideale untersucht, vor allem die Frage, wann jedes Ideal als die Menge aller auf einer bestimmten Teilmenge von S verschwindenden Funktionen aufgefaßt werden kann.

G. Köthe (Gießen).

Bochner, S.: Additive set functions on groups. *Ann. of Math.*, II. s. **40**, 769—799 (1939).

Let \mathfrak{G} be a set with elements x, y, \dots and J the class of subsets of \mathfrak{G} . J is called Jordan field if and only if 1. 0 (empty set) $\in J$, $E \in J$ implies $\mathfrak{G} - E \in J$, 2. $E_1, E_2 \in J$ implies $E_1 \cdot E_2 \in J$, $E_1 + E_2 \in J$, 3. a numerical function $vE = |E|$, $0 \leq |E| \leq 1$, $|0| = 0$, $|\mathfrak{G}| = 1$, being defined for each $E \in J$, and 4. $E_1 \cdot E_2 = 0$ implies $|E_1 + E_2| = |E_1| + |E_2|$. Partition $\delta = \delta(E_v)$ of \mathfrak{G} is a representation of \mathfrak{G} as a finite sum of mutually exclusive elements E_v ($v = 1, 2, \dots, n$) in J . When $f(x)$ is a bounded real function on \mathfrak{G} , its Riemann integral is defined by the value

$$\lim_{\delta} \sum_v \sup_{x \in E_v} f(x) \cdot |E_v| \quad \text{or} \quad \lim_{\delta} \sum_v \inf_{x \in E_v} f(x) \cdot |E_v|,$$

if they coincide, where \lim_{δ} is taken in the Moore-Smith sense. — This value is denoted by $\int f(x) dv$. Let R be the entity of such (integrable) functions $f(x)$, and R_0 the subclass of R consisting of functions $f(x)$ such that corresponding to any $\varepsilon > 0$ there exists a partition $\delta(E_v)$ that the oscillation of $f(x)$ is $< \varepsilon$ on each E_v . If for each $f(x) \in R$ the norm $\|f(x)\|_p = (\int |f(x)|^p dv)^{1/p}$ ($p \geq 1$) is introduced and the so normed space is denoted by R_p , then the step-functions are dense in R_p . — $f(x)$ is called a step-function if there exists a partition $\delta(E_v)$ such that $f(x)$ is constant on each E_v . — Let C be the

class of bounded functions everywhere defined on \mathfrak{G} and $M_x f(x)$ a numerical function defined for all $f(x) \in C$ such that 1. C contains $f(x) \equiv 1$, 2. $f_1 \in C, f_2 \in C$ imply $f_1 \cdot f_2 \in C$, $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in C$ for every constants c_1, c_2 , 3. $f \in C$ implies $\bar{f} \in C$, 4. if $f \in C$ and f is real, then $|f| \in C$, 5. $M_x 1 = 1$, 6. $M_x(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M_x f_1 + c_2 M_x f_2$, 7. $f(x) \geq 0$ implies $M_x f(x) \geq 0$, 8. if $f_n \in C$ converges uniformly to f then $f \in C$ and $M_x f_n$ converges to $M_x f$. Then there exists a Jordan field J_C such that 1. C belongs to the class R_0 on that field, 2. $M_x f(x) = \int f(x) dv$, 3. C is dense in each R_p ($p \geq 1$). Put $v^* A = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geq \omega_A}} M_x f(x)$,

$v_* A = \sup_{\substack{f \in C \\ f \leq \omega_A}} M_x f(x)$ (ω_A is the characteristic function of A) for any $A \in \mathfrak{G}$. J_C is defined

as the class of A such that $v^* A = v_* A$. As easily may be verified, J_C satisfies the required conditions. Such an J_C is called the generated Jordan field. A generated Jordan field J_C can be extended to a Lebesgue field [which is a Jordan field such

that 1. $E_\nu \in J$ ($\nu = 1, 2, \dots$) implies $\sum_1^\infty E_\nu \in J$, 2. $E_\nu \uparrow (\downarrow) E$ implies $|E_\nu| \rightarrow |E|$,

3. $|E| = 0, E' \in E$ imply $E' \in J$] if and only if for any sequence $\{f_n(x)\} \in C$, $\lim_n f_n(x) = 0, |f_n(x)| \leq K$ imply $\lim_n M_x f_n(x) = 0$. — Let $F(E)$ be a real valued set-

function defined for all E in J , additive and of bounded variation. $F(E)$ is called constant in E_0 if $|E_0| > 0$ and $F(E)/|E| = F(E_0)/|E_0|$ for all $E \in E_0$ with positive $|E_0|$. $F(E)$ is called a step-function when there is a partition $\delta(E_\nu)$ such that $F(E)$ is constant in each E_ν . For given $p \geq 1$ and $F(E)$, put $A(\delta) = \left(\sum_\nu |F(E_\nu)|^p |E_\nu|^{p-1} \right)^{1/p}$

where $|F(E_\nu)|^p |E_\nu|^{p-1}$ shall have the value 0 for $|E_\nu| = 0$ if $p > 1$. We introduce a norm by $\|F\|_p = \lim_\delta A(\delta)$ and denote the resulting complete Banach space by V_p .

AC means a subspace of V_1 such that for any $\varepsilon > 0$, there is an $\eta(\varepsilon)$ tending to 0 with ε such as $|E| \leq \eta(\varepsilon)$ implies $|F(E)| \leq \varepsilon$. Then step-functions are dense in V_p ($p > 1$) and AC concerning respective topology. This is a generalization to Jordan fields of the theory of Nikodym [This result is extended by Ref., Proc. Imp. Acad. Jap. 15 (1939); this Zbl. 21, 394]. — Finally supposing that \mathfrak{G} is a group, the author develops Fourier analysis of point- and set-functions. The Bessel inequality and the Riesz-Fischer theorem are proved under certain conditions. Further Plessner's theorem concerning absolute continuity and M. Riesz's theorem concerning conjugate functions are extended

Izumi (Sendai).

Variationsrechnung:

Tonelli, Leonida: L'analisi funzionale nel calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 289—302 (1940).

Dans l'article en question l'A. donne un coup d'oeil à la méthode directe, qu'il a développé dans ses derniers six lustres, et à ses progrès auxquelles ont contribué aussi des mathématiciens étrangers. — À différence des anciennes recherches variationnelles qui portaient des équations différentielles, à la base de la méthode en question, qui suit les liaisons entre le Calcul des Variations et le Calcul fonctionnel, se trouve la notion de semi-continuité, propriété commune à la plupart des fonctionnelles du Calcul des Variations. — L'article en examen développe, en manière nouvelle et originale et avec des considérations très suggestives, les points de vue suivants: la nécessité des méthodes directes, la façon dans laquelle l'analyse fonctionnelle est utilisée, les résultats atteints par la nouvelle méthode, les problèmes qu'on étudie aujourd'hui, et de plus les questions que l'analyse fonctionnelle propose aux variationnistes et que l'A. va résoudre. Entre ces dernières sont très intéressantes la recherche de l'extrémum pour des fonctionnelles très générales (et dans lesquelles rentrent celles du Calcul des Variations), et l'extension de la théorie variationnelle aux espaces abstraits. S. Cinquini.

Cinquini, Silvio: Una nuova estensione dei moderni metodi del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 253—261 (1940).

On étudie le problème du minimum de l'intégrale $\int_a^b f(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}) dx$ dans l'hypothèse que les nombres a, b ne soient pas finis tous les deux, et on fait extension à ce nouveau cas de la méthode bien connue de Tonelli en supposant, pour fixer les idées, qu'on ait $b = +\infty$, tandis que a est toujours fini. — On suppose que $f(x, y, y')$ soit une fonction définie et continue dans tous les points (x, y) d'un domaine A et pour chaque valeur finie de y' , et on appelle courbe $C^{(+\infty)}$ chaque courbe $y = y(x)$, ($a \leq x < +\infty$) telle que: 1° tous les points $(x, y(x))$ appartiennent au domaine A ; 2° dans chaque intervalle (a, t) (avec $a < t < +\infty$) la fonction $y(x)$ est absolument continue et l'intégrale (dans le sens de Lebesgue) $\int_a^t f(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}) dx$ est finie; 3° l'intégrale généralisée

$$I_{C^{(+\infty)}} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}) dx$$

est finie. — On appelle classe de courbes complète au fini un ensemble J de courbes $C^{(+\infty)}$ tel que chaque courbe d'accumulation au fini, qui est une courbe $C^{(+\infty)}$, appartient à J . — Des résultats atteints on rappelle, par exemple, le théorème suivant: On suppose que: a) il y a un nombre fini ω et une fonction $\psi(x)$, ($\omega \leq x < +\infty$) continue et telle que l'intégrale $\int_{\omega}^{+\infty} \psi(x) dx$ soit finie, de façon que en tous les points (x, y) de

A soit $x \geq \omega$ et $f(x, y, y') \geq \psi(x)$ pour chaque valeur finie de y' ; b) l'intégrale $I_{C^{(+\infty)}}$ est quasi régulière positive; c) pour chaque paire de nombres h, Y , avec $h > \omega, Y > 0$, il y a une fonction $\Phi_{h,Y}(z)$, ($0 \leq z < +\infty$) inférieurement bornée telle que soit $\Phi_{h,Y}(z)/z \rightarrow +\infty$, pour $z \rightarrow +\infty$, et que en tous les points (x, y) de A , qui vérifient les inégalités $\omega \leq x \leq h, |y| \leq Y$, soit $f(x, y, y') \geq \Phi_{h,Y}(|y'|)$; d) il y a une fonction $g(x) \geq 0$, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ soit finie, un nombre $\lambda > 0$ et une fonction $\varphi(u)$ définie pour $|u| \geq \lambda$, continue, non négative et telle que soit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = +\infty$, de façon que, en tous les points (x, y) de A avec $|y| \geq \lambda$, soit

$$f(x, y, y') - \psi(x) \geq |y'| \varphi(y),$$

pour tous les y' qui vérifient l'inégalité $|y'| \varphi(y) \geq g(x)$. — Alors si J est une classe de courbes $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, ($a \leq x < +\infty$) du domaine A , laquelle est complète au fini, et si il y a un ensemble borné E de points de A tel que au moins un point $(x, y(x))$ de chaque courbe de J appartient à E , il existe au moins une courbe de J qui réalise le minimum (absolu) de $I_{C^{(+\infty)}}$.

S. Cinquini (Pavia).

McShane, E. J.: An estimate of the Weierstrass \mathcal{G} -function. Ann. of Math., II. s. 41, 314—320 (1940).

W. E. Reid hat (dies. Zbl. 17, 267) zur Aufstellung einer hinreichenden Bedingung für das Bolzasche Problem von einer auf die Weierstraßsche Funktion \mathcal{G} bezüglichen Ungleichung Gebrauch gemacht, die unter der Annahme gilt, daß die fragliche Kurve nicht singular sei. In der vorliegenden Arbeit eliminiert Verf. diese Annahme. — Verf. setzt voraus: Die Funktionen $f(x, y, r)$ und $\varphi^\alpha(x, y, r)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m < n$) seien endlich und stetig zugleich mit ihren partiellen Ableitungen bezüglich der r^i in allen Punkten $(x, y, r) \equiv (x, y^1, \dots, y^n, r^1, \dots, r^n)$ einer Menge R ; eine Menge (x, y, r) heißt zulässig, wenn sie zu R gehört und die Gleichungen $\varphi^\alpha(x, y, r) = 0$ befriedigt. Ferner wird in tensorieller Bezeichnung gesetzt:

$$F(x, y, r, \lambda) \equiv \lambda^0(f(x, y, r) + \lambda^\alpha \varphi^\alpha(x, y, r),$$

$$\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) \equiv F(x, y, \bar{r}, \lambda) - F(x, y, r, \lambda) - (\bar{r}^i - r^i) F_i(x, y, r, \lambda),$$

wo $F_i = \frac{\partial F}{\partial r_i}$ bedeutet. — Verf. beweist folgenden Satz: Voraussetzung: 1. Die Kurve $C: y = \gamma(x)$, ($x_1 \leq x \leq x_2$) ist derart, daß $\gamma'(x)$ stetig und (x, γ, γ') zulässig ist. 2. Es gibt eine Zahl λ^0 und m stetige Funktionen $\lambda^1(x), \dots, \lambda^m(x)$, derart, daß man im Raume (x, y, r, λ) eine Umgebung N der Punktmenge $(x_1 \leq x \leq x_2, \gamma(x), \gamma'(x), \lambda(x))$ finden kann, so daß $\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) > 0$ ist, wenn (x, y, r, λ) und (x, y, \bar{r}, λ) zwei verschiedene zulässige Mengen sind und (x, y, r, λ) zu N gehört. 3. Die Matrix $\left\| \frac{\partial \varphi^\alpha(x, \gamma, \gamma')}{\partial r^i} \right\|$ hat den Rang m im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$. Alsdann gibt es zu jeder Zahl $\sigma > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ und eine Umgebung N_0 der Punkte $(x, \gamma(x), \gamma'(x), \lambda(x))$ im Raume (x, y, r, λ) , so daß die Ungleichung $\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) \geq \mu |\bar{r} - r|$

erfüllt ist, wenn (x, y, r, λ) in N_0 liegt, die Mengen (x, y, r) und (x, y, \bar{r}) zulässig sind, und $|\bar{r} - r| \geq \sigma$ ist. S. Cinquini (Pavia).

Kneser, Hellmuth: Homogene Funktionen auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 101—103 (1940).

L'A. arreca un complemento ad un lavoro di N. Sakellariou (questo Zbl. **22**, 55). S. Cinquini (Pavia).

Funktionentheorie:

Khaphlanov, M. G.: Sur les coefficients de Taylor d'une classe de fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 678—683 (1940).

Verf. betrachtet meromorphe Funktionen von der Form

$$(1) \quad f(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{(z - \alpha_k)^p} + \frac{b_k}{(z - \alpha_k)^{p-1}} + \dots + \frac{l_k}{z - \alpha_k} + P_k(z) \right],$$

wo $\alpha_k \neq 0$ und die $P_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, Polynome sind, und entwickelt sie im Nullpunkt in eine Potenzreihe,

$$(2) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

Konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{|\alpha_k|^{N+p}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{|\alpha_k|^{N+p-1}}, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l_k|}{|\alpha_k|^{N+1}}$$

für ein positives ganzes N , so gilt für die Entwicklungskoeffizienten die Interpolation

$$(3) \quad c_n = \varphi(n), \quad (n \text{ genügend groß}),$$

wobei $\varphi(z)$ in einer Halbebene $\Re z \geq A$ regulär und von der Form ist

$$(4) \quad \varphi(z) = z^{p-1} \cdot \omega_1(z) + z^{p-2} \cdot \omega_2(z) + \dots + \omega_p(z),$$

$$\omega_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad \dots, \quad \omega_p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k e^{-\lambda_k z},$$

$$\lambda_k = \log \alpha_k \quad (\text{komplexe Exponenten}).$$

Umgekehrt, gilt die Interpolation (3) für eine Funktion $\varphi(z)$ von der Form (4) und besitzen die zugehörigen Dirichletschen Reihen mit komplexen Exponenten λ_k , $\Re \lambda_k \rightarrow \infty$ ein absolutes Konvergenzgebiet, so stellt die Potenzreihe (2) eine meromorphe Funktion der Form (1) dar. Die Polstellen sind e^{λ_k} . Der Beweis beruht auf einfachen Reihenumordnungen und Konvergenzbetrachtungen. Pfluger (Freiburg/Schweiz).

Bieberbach, Ludwig: Über Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen. Deutsche Math. **5**, 272—273 (1940).

Vgl. dies. Zbl. **23**, 336. Anerkennung früherer Untersuchungen zum Gegenstande, nicht ohne Kritik an den Vorgängern. Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Aussage unter Ausdehnung des Begriffs „Schlitzbereich“. Ullrich (Gießen).

Whitmore, William F.: *Convergence theorems for functions of two complex variables*. Amer. J. Math. 62, 687—696 (1940).

Der Verf. überträgt auf spezielle Bereiche im Raume zweier komplexer Veränderlichen z_1, z_2 (sog. *M*-Bereiche) folgenden Satz aus der klassischen Funktionentheorie: Konvergiert eine im Einheitskreise reguläre und beschränkte Funktion gegen einen Grenzwert bei einseitiger Annäherung längs des Randes an einen festen Randpunkt, so konvergiert sie gleichmäßig gegen denselben Wert bei Annäherung an den Randpunkt längs jeder Kurve, die in diesem Punkte mit dem Rand einen positiven Winkel bildet. Bei der Übertragung des Satzes tritt an die Stelle des Einheitskreises die ausgezeichnete Randfläche (Bestimmungsfläche) des *M*-Bereiches, und an Stelle der zweidimensionalen Winkelräume treten gewisse vierdimensionale Winkelräume. Zum Beweise werden einige Ergebnisse von Stefan Bergmann, insbesondere das von ihm eingeführte doppelharmonische Maß herangezogen. Außerdem werden einige Tatsachen der klassischen Funktionentheorie benutzt. *F. Sommer* (Berlin).

Tornehave, Hans: *Grundzüge der Theorie der Regularitätsgebiete*. Mat. Tidsskr. B 1940, 45—61 [Dänisch].

Die Veröffentlichung enthält einen für Kenner des Dänischen hübschen Vortrag über einige Ergebnisse der Untersuchungen von H. Cartan, P. Thullen, K. Oka mit Beweisskizzen, doch ohne wesentlich neue Gesichtspunkte. *Ullrich* (Gießen).

Numerische und graphische Methoden.

● Gauß, Friedrich Gustav: *Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln neuer Teilung für Hundertteilung des Rechten*. (Dezimal unterteilter Neugrad.) Neu hrsg. v. Hans Heinrich Gobbin. Stuttgart: Wittwer 1940. XXIV, 189 S. RM. 4.50.

● Peters, J.: *Siebenstellige Logarithmentafel*. Bd. 1 u. 2. Berlin: Verl. d. Reichsamt f. Landesaufnahme 1940. Bd. 1: 493 S. Bd. 2: 666 S. geb. RM. 30.—.

Der erste Band bringt die Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen, Additions- und Subtraktionslogarithmen und als Anhang eine Sammlung mathematischer Formeln und mathematischer und geodätischer Konstanten. Die Anordnung der Tafeln entspricht im wesentlichen der allgemein gebräuchlichen bei siebenstelligen Tafeln: 5 Einheiten sind tabuliert, die 6. und 7. durch Interpolation einzuschalten. Der dem Argumentunterschied 0000 1 entsprechende Funktionsunterschied ist beim Übergang von der 9. zur 10. Einheit angegeben und in Proportionaltafelchen jeweils am unteren Ende der betreffenden Seite tabuliert. Wesentlich bereichert ist die Tafel durch Aufnahme der Antilogarithmen, die ein bequemerer Aufschlag des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus und der kleineren Funktionsunterschiede wegen ein leichteres Interpolieren gestatten. Im zweiten Band sind die trigonometrischen Funktionen für jede 10. Sekunde des Neugrades tabuliert. Für sin und tg von 0° bis 3° (bzw. für cos und ctg von 97° bis 100°) ist eine Sondertafel mit einer Argumentdifferenz von 1 Neusekunde aufgenommen. Vervollständigt werden diese Tafeln durch Angabe der Funktionen $S = \lg \frac{\sin \omega}{\omega}$ und $T = \lg \frac{\tan \omega}{\omega}$ im gleichen Bereich. Eine Tafel zur Umwandlung von Neugradmaß in Bogenmaß bildet den Abschluß des Werkes. In der Haupttafel sind die Funktionsunterschiede für 10 Neusekunden in Abständen von 5 Neuminuten angegeben und ebenfalls in gleicher Anordnung wie beim ersten Band als Proportionaltafelchen tabuliert. — Dem Werke sind zum größten Teil eigene Veröffentlichungen zugrunde gelegt, zum kleineren Teil ist auf bekannte ausländische Tabellenwerke zurückgegriffen. Überall dort, wo durch Abrundungsfehler Fehler in der letzten Einheit zu befürchten waren, wurden weitere Werke herangezogen und in Zweifelsfällen der endgültige Wert durch Rechnung festgestellt. Hierdurch ist es dem Verf. gelungen, den Höchstfehler immer kleiner als eine halbe Einheit der siebensten Stelle zu halten. Gegenüber den sonst gebräuchlichen Tafeln gleicher Stellenzahl erscheint das Werk in einem größeren Format, so daß nun auch für die Proportionaltafelchen eine ausreichende Schriftgröße gewählt und bei allen tabulierten Werten die letzten 5 Einheiten bei nur 2 abgetrennten Einheiten angegeben werden konnten. Das hierdurch bedingte sichere Arbeiten wird durch die Zahlenanordnung und durch den klaren Druck bestens unterstützt. *J. Sutor* (Danzig).

● Balogh, Arthur: *Fluchtlinientafeln mit rechteckigen Verbindungsgeraden*. Zürich: Wurzel 1939. 60 S. RM. 1.50.

Nikolaev, P. V.: Polynômes de Masseau et transformations rationnelles de nomogrammes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 582—584 (1940).

Die Masseausche Determinante $|f_{i1}(t_i)f_{i2}(t_i)f_{i3}(t_i)| = 0$, in der $f_{ij}(t_i)$ ($i; j = 1, 2, 3$) Polynome sind, stellt für die Funktion $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ die Bedingung dafür dar, daß in der Netztafel (x, y) die nach t_i benannten Kurvenscharen $f(x, y, t_i) = 0$ gerade Linien darstellen, oder daß bei Funktionsleitern Kollinearität der zusammengehörigen Punkte t_i vorliegt. Der Verf. nennt Polynome $F(t_1, t_2, t_3)$, die eine allgemeine Anamorphose in die Determinante $|f_{i1}(t_i)f_{i2}(t_i)f_{i3}(t_i)| = 0$ zulassen, Polynome von Masseau. Diese spezialisiert er und gibt Eigenschaften an. So können alle „reduzierten“ Masseauschen Polynome aufgefaßt werden als Resultanten eines Systems von Polynomen $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $\varphi_i(t_i, \tau_i)$ ($i = 1, 2, 3$), in dem $f(\tau_i)$ ein „normales“ Masseausches Polynom ist und die $\varphi_i(t_i, \tau_i) \equiv \varphi_{i1}(t_i) - \tau_i \varphi_{i2}(t_i)$ sind. Die Umrechnung auf diese Form kann nach einem Algorithmus von Lüroth erfolgen. — Anschließend behandelt der Verf. rationale Transformationen von Nomogrammen Masseauscher Prägung. Er nennt jede irreduzible Gleichung $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ eine Masseausche, für die ein Masseausches Polynom $F_1(t_1, t_2, t_3)$ existiert, das sich von der Ausgangsgleichung nur durch die Faktoren unterscheidet. Jede allgemeine Anamorphose von F_1 ist dann eine Anamorphose von F selbst. Nun wird der Einfluß z. B. der Transformation $\rho'_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$ ($i = 1, 2, 3$) auf F_1 bzw. F gezeigt.

Nehring (Bitterfeld).

Maisel, W. M.: On the accuracy of Dunkerley's formula and approximate computation of the lower frequency of oscillations. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, 119—123 u. engl. Zusammenfassung 123—124 (1939) [Russisch].

Für die größte charakteristische Zahl einer quadratischen symmetrischen n -reihigen Matrix A werden Schranken angegeben, wobei von den (aus einer quadratischen Gleichung zu berechnenden) charakteristischen Zahlen einer zweireihigen Teilmatrix ausgegangen wird. Engere Schranken erhält man, wenn man das gleiche Verfahren auf A^2 oder A^4 anwendet.

Collatz (Karlsruhe).

Proshko, B. M.: Electrical apparatus for solution of system of linear algebraic equations. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, Nr 4, 195—206 u. engl. Zusammenfassung 206 (1939) [Russisch].

K. W. Samsonow hat in Appl. Math. a. Mech. 2, 309—313 (1935) (dies. Zbl. 11, 265) einen Apparat zur iterativen Lösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten beschrieben, der auf Spannungsteilerschaltungen beruht. Verf. hat ein entsprechendes Gerät für 10 Gleichungen mit 10 Unbekannten gebaut. Besondere Überlegungen werden zur Erhöhung der Genauigkeit angestellt, die gegenüber der des Samsonowschen Gerätes beträchtlich verbessert ist.

Theodor Zech.

Heinrich, Helmut: Bemerkungen zur graphischen Integration. Z. angew. Math. Mech. 20, 121—123 (1940).

Zur Erhöhung der Genauigkeit des Tangenten- und des Sehnenverfahrens zur graphischen Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ (entsprechend Formeln zweiter Ordnung des Verfahrens von Runge, Heun und Kutta) wird die Verwendung von Iterationen bei jedem Schritt vorgeschlagen. Durch Entwicklung der Differenz zwischen dem wahren Ordinatenzuwachs und dem konstruierten Näherungswert nach Potenzen der Schrittweite h wird gezeigt, daß sowohl mit als auch ohne Iterationen der Fehler bei einem Schritt von der Ordnung h^3 ist. Eine lineare Kombination der Näherungswerte aus beiden Verfahren gestattet zwar den Fehler auf die Ordnung h^4 herabzudrücken, ist aber wohl meistens zeichnerisch nicht mehr einfach genug durchzuführen. Das Iterationsverfahren läßt sich in der gleichen Weise auch dann durchführen, wenn die Unterteilung des Richtungsfeldes nicht durch y -Parallelen geliefert wird, sondern durch eine andere Kurvenschar, z. B. durch die Isopunktalen bei Verwendung von Leitkurven.

Günther Schulz (Berlin).

Mikeladze, Sch. E.: Über die Lösung von Randwertproblemen mit der Differenzenmethode. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 400—402 (1940).

Zur genäherten numerischen Lösung von Randwertproblemen bei einigen Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung wird ein Differenzenverfahren beschrieben, welches Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{i=-r}^r \sum_{k=0}^n A_{ik} \frac{d^k y(x_0 + ih)}{dx^k} = 0$$

verwendet. Die Ableitungen sind dabei vermöge der vorgelegten Differentialgleichung durch Funktionswerte $y(x_0 + ih)$ auszudrücken. *Collatz* (Karlsruhe).

Lax, Franz, und Heinz Jordan: Über die Fourier-Entwicklung der Felderregerkurve von schrittverkürzten Drehstromwicklungen beliebiger Phasenzahl. Arch. Elektrotechn. 34, 591—597 (1940).

Um die Fourierreihe der Felderregerkurve einer Drehstromganzlochwicklung zu finden, gehen die Verff. vom Strombelag eines einzelnen, einer Halblochspule entsprechenden Leiters aus, wobei das Sprungstellenverfahren zur harmonischen Analyse nach G. Koehler und A. Walther, Arch. Elektrotechn. 25, 747—758 (1931); dies. Zbl. 3, 66, benutzt wird. Die gewünschte Kurve läßt sich dann durch Überlagerung und Integration aufbauen. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Stumpff, K.: Eine neue algebraische Methode zur Ermittlung unbekannter Perioden. Gerlands Beitr. Geophys. 57, 1—19 (1940).

Aus $2n$ gleichabständigen Ordinaten

$$y_\nu = c \sin[(2\nu - 2n - 1)\alpha + \beta], \quad \nu = 1, \dots, 2n,$$

einer Sinuslinie der Frequenz 2α erhält man durch formale harmonische Analyse

$$a_\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{2n} y_\nu \cos(2\nu - 1)\mu x, \quad \mu = 1, \dots, n - 1; \quad x = \frac{\pi}{2n}$$

als cos-Koeffizienten

$$a_\mu = \frac{2c \sin \beta \sin 2n\alpha \sin \alpha}{n \cos 2\mu x - \cos 2\alpha} \cos \mu x.$$

Sieht man die Ordinaten y_ν und damit die Fourier-Koeffizienten a_μ als bekannt, die Frequenz 2α , die Phase β und die Amplitude c als gesucht an, so hat man damit $n - 1$ lineare Gleichungen für die beiden Unbekannten $c \sin \beta \sin 2n\alpha \sin \alpha$ und $\cos 2\alpha$. Die Elimination der ersten Unbekannten aus zwei ausgewählten Gleichungen ergibt einen einfachen Ausdruck für $\cos 2\alpha$ und liefert so die Frequenz. Phase und Amplitude erhält man dann aus der anderen Unbekannten unter Kombination mit einer entsprechenden Gleichung für die sin-Koeffizienten b_μ . — Bei Ordinaten y_ν einer Überlagerung aus zwei Sinuslinien mit Konstanten $\alpha_1, \beta_1, c_1, \alpha_2, \beta_2, c_2$ läßt sich auf ähnlichem Wege eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $\cos 2\alpha_1, \cos 2\alpha_2$ angeben. Eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl N von Sinusbestandteilen der y_ν wird ohne Beweis mitgeteilt; sie gibt die $\cos 2\alpha_i$ als Lösungen einer Gleichung N -ten Grades. Verf. erhofft von der Benutzung der in den y_ν symmetrischen Fourier-Koeffizienten sowie von der gleichmäßigeren Ausnutzung des Beobachtungsmaterials eine Verringerung der Empfindlichkeit auf Beobachtungsfehler oder andere Störeinflüsse gegenüber den sonst üblichen algebraischen Verfahren zur Periodenaufsuchung, bei denen Differenzen der Beobachtungswerte zugrunde liegen. *Theodor Zech*.

Köhlmoos: Die Geipelsche Hypotenusentafel. Z. Vermessungswes., Stuttg. 70, 22—25 (1941).

Entsprechend der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ besteht die Tafel aus einer Schar konzentrischer Kreise mit der Bezifferung r . Um eine Genauigkeit von 1 cm zu erreichen, ist die Tafel im Maßstab 1:10 gezeichnet und in 110 Einzelblätter 10×20 cm für den Bereich von 0 bis 20 m zerlegt. *J. Sutor* (Danzig).